2003 年度卒業研究

π の数値解析

明治大学理工学部数学科
清水 康生

2004 年 2 月 27 日

目 次

第 1 章　円と内接・外接正多角形 **2**

1.1 アルキメデスの方法 2

1.1.1 イントロ 2

1.1.2 周の長さと π の関係 2

1.1.3 周の長さを求める 4

1.1.4 アルキメデスが実際に使用した式 7

1.2 建部賢弘の用いた加速法 8

1.2.1 イントロ 8

1.2.2 実験と解説 8

第 2 章　逆正接関数 (arctan) **18**

2.1 マーダヴァ・グレゴリー・ライプニッツ級数 18

2.1.1 証明 1 18

2.1.2 証明 2 19

2.2 ジョン・マチンの公式 20

2.2.1 証明 20

2.3 アブラハム・シャープの公式 21

2.4 チャールズ・ハットンの公式 22

2.5 ガウスの公式 22

2.6 クリゲンシュテルナの公式 22

2.7 シュテルマーの公式 22

2.8 オイラーの公式 23

2.9 高野喜久雄の公式 23

第 3 章　AGM (算術幾何平均) **24**

第1章　円と内接・外接正多角形

1.1　アルキメデスの方法

1.1.1　イントロ

アルキメデス (B.C.287?-B.C.212) よりも以前から円周率の値は研究されていて、古代バビロニア (B.C.2000) では当時用いられていた 60 進法で近似値を測ったと推測される値 $3+\frac{1}{8}(=3.125)$ という値が円周率の近似値として使用されていた。また、古代エジプト (B.C.1800) では $(16/9)^2(=3.1604\cdots)$ が使用されていた。このように、アルキメデス以前から円周率の近似値は知られていた。しかし、なぜ「最初の円周率」といえば「アルキメデス」となってしまっているのか。それはアルキメデスが求めた値が円周率の近似値であることを厳密に示したことに由来する。次の節 1.1.2 では、その証明を簡単にしてみようと思う。もちろん、アルキメデスの時代には三角関数などは存在しないので、初等幾何学だけを利用して示す。[1]

1.1.2　周の長さと π の関係

半径 1 の円の内接正 n 角形の周の長さを p_n、外接正 n 角形の周の長さを P_n とすると、

$$p_n < p_{2n} < p_{4n} < \cdots < \pi < \cdots < P_{4n} < P_{2n} < P_n$$

が成り立つ。

証明　内接正多角形に関する不等式の部分は、

2 点を結ぶ曲線の中で、最短のものは線分である

という周知の事実を使えばすぐにわかる。(図 1.1 の左) 次に外接正多角形に関す

[1] 完璧に現代風に再現された証明方法は上野健爾 [6] に記載されてある。

図 1.1: 左：内接正多角形の一辺と弧の位置関係、右：A_n

る不等式の部分を考える。

半径 1 の円に外接する正 n 角形の一辺の長さの半分を A_n とすると、(図 1.1 の右) 外接正 n 角形の周の長さは

$$P_n = 2nA_n \tag{1.1}$$

である。

また、円の面積よりも外接正 n 角形の面積の方が大きいという事実を用いて、

$$\begin{aligned}\pi = (\text{円の面積}) &< (\text{外接正 } n \text{ 角形の面積}) \\ &= n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2A_n \cdot 1 \quad (\because n \text{ 個の三角形の和}) \\ &= nA_n < 2nA_n = P_n.\end{aligned}$$

ゆえに、

$$\pi < P_{2^{k+1}} \quad (k \in \boldsymbol{N})$$

ということがわかった。次に、$P_{2n} < P_n$ であることを証明する。外接正 $2n$ 角形の面積よりも外接正 n 角形の面積の方が大きいという事実を用いて、

$$\begin{aligned}(\text{外接正 } 2n \text{ 角形の面積}) &< (\text{外接正 } n \text{ 角形の面積}) \\ 2nA_{2n} &< nA_n \\ 2 \cdot 2nA_{2n} &< 2 \cdot nA_n \\ P_{2n} &< P_n \quad (\because \text{式 } (1.1)).\end{aligned}$$

よって、題意は示された。■

1.1.3　周の長さを求める

先ほどは周の長さと π の関係について触れたが、今度は具体的に周の長さを求めてみる。内接正 n 角形の周の長さ p_n と外接正 n 角形の周の長さ P_n をそれぞれ求め、円周率を上下から評価して求める。読者は前節のように幾何学的に求めるよりも、三角関数という便利なものを用いて考えたほうが容易であろう。

改めて半径 $\frac{1}{2}$ の円に内接する正 n 角形の周の長さを p_n 、外接する正 n 角形を P_n とする。内接正 n 角形の一辺の長さは

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{n} = \sin \frac{\pi}{n}$$

であるから、内接正 n 角形の周の長さ p_n は、

$$p_n = n \sin \frac{\pi}{n}$$

となる。同様にして、外接正 n 角形の周の長さを求めることができる。

$$P_n = n \tan \frac{\pi}{n}.$$

次に、内接正 $2n$ 角形の周の長さ p_{2n} 、外接正 n 角形の周の長さ P_{2n} を p_n を用いて表す。

$$\begin{aligned} p_{2n}^2 &= \left(2n \sin \frac{\pi}{2n}\right)^2 = \frac{(2n)^2 \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{n}\right)}{2} \\ &= 2n^2 \left(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{n}}\right) = 2n \left(n - \sqrt{n^2 - {p_n}^2}\right), \end{aligned}$$

$$P_n = n \tan \frac{\pi}{n} = \frac{n \sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{n}}} = \frac{p_n}{\sqrt{1 - \left(\frac{p_n}{n}\right)^2}}.$$

内接正 4 角形（正方形）の周の長さは $4 \sin \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$ なので

$$p_4 = 2\sqrt{2}.$$

今までの関係式をまとめると次のようになる。

$$\begin{aligned} & p_{2n}^2 = 2n(n - \sqrt{n^2 - {p_n}^2}), \\ & P_n = \frac{p_n}{\sqrt{1 - \left(\frac{p_n}{n}\right)^2}} \qquad (n \text{ は } 2 \text{ 以上の自然数}), \\ & p_4 = 2\sqrt{2}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

これらの式によって、$p_4, P_4, p_8, P_8, p_{16}, P_{16}, \cdots$ を求めることができる。これらの値はとても面白く、きれいな形をしている。下の値を見ていただきたい[2]。

$$p_4 = 2\sqrt{2} \qquad P_4 = 4$$

$$p_8 = 4\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad P_8 = 8\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$$

$$p_{16} = 8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \qquad P_{16} = 16\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

$$p_{32} = 16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \qquad P_{32} = 32\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

ここから、次の推測をすることができる。

3 以上のすべての自然数 n に対して

$$p_{2^n} = 2^{n-1}\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}}_{\text{根号は } n-1 \text{ 個}} \qquad P_{2^n} = 2^n\underbrace{\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}}}_{\text{根号は } n-1 \text{ 個}} \tag{1.3}$$

これは帰納法で簡単に証明することができる。p_{2^n}, P_{2^n} それぞれ同じ方針で証明できるので p_{2^n} だけ証明する。

証明　$n = 3$ のとき $p_{2^3} = 2^{3-1}\sqrt{2-\sqrt{2}} = 4\sqrt{2-\sqrt{2}}$ より、成立する。

$n = k$ のとき 式 (1.3) の成立を仮定する。

[2]値は数式処理ソフト Mathematica を使用して求めた

式 (1.2) より

$$
\begin{aligned}
p_{2^{k+1}} &= \sqrt{2^{k+1}\left(2^k - \sqrt{(2^k)^2 - p_{2^k}^2}\right)} \\
&= \sqrt{2\cdot(2^k)^2 - 2\cdot 2^k\sqrt{(2^k)^2 - 2^{2(k-1)}\left(2 - \sqrt{2+\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}\right)}} \\
&= \sqrt{2\cdot(2^k)^2 - 2^k\sqrt{4(2^k)^2\left(1 - 2^{-2}\left(2 - \sqrt{2+\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}\right)\right)}} \\
&= \sqrt{2\cdot(2^k)^2 - (2^k)^2\sqrt{4 - \left(2 - \sqrt{2+\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}\right)}} \\
&= 2^k\sqrt{2 - \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}}
\end{aligned}
$$

よって、2 以上の全ての自然数 n に対して式 (1.3) は成立する。P_{2^n} の場合も同様にして証明することができる .■

次に、p_n, P_n を小数で表してみる。こちらのほうがどのくらい円周率に近い値であるのかがわかりやすいであろう。

$$
\begin{aligned}
p_4 &= 2.82843\cdots & P_4 &= 4.00000\cdots \\
p_8 &= 3.06147\cdots & P_8 &= 3.31371\cdots \\
p_{16} &= 3.12145\cdots & P_{16} &= 3.1826\cdots \\
p_{32} &= 3.13655\cdots & P_{32} &= 3.15172\cdots \\
p_{64} &= 3.14033\cdots & P_{64} &= 3.14412\cdots \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}
$$

p_n, P_n の n の値を増加させることによって、徐々に円周率の値に近づいていることが読み取れる。ただし、上記の結果は数式処理ソフト Mathematica を使用し、

```
p[n_] := Simplify[Sqrt[n*(n/2 - Sqrt[(n/2)^2 - p[n/2]^2])]]
p[4] = 2Sqrt[2]
P[n_] := Simplify[p[n]/Sqrt[1 - (p[n]/n)^2]]
```

```
Table[N[p[2^n], 10], {n, 2, 6}]
Table[N[P[2^n], 10], {n, 2, 6}]
```

と入力した結果を用いた。

そして、アルキメデスは円の内接・外接正 6 角形の周の長さから求め始め、内接・外接正 96 角形の周の長さを求め円周率の値が約 3.14 であることを示した。そのアルキメデスの求めた結果を下に記す。

半径 $\frac{1}{2}$ の円に内接する正 6 角形の値 p_6 は 3 なので、

$$\begin{aligned} p_6 &= 3.00000\cdots & P_6 &= 3.4641\cdots \\ p_{12} &= 3.10583\cdots & P_{12} &= 3.21539\cdots \\ p_{24} &= 3.13263\cdots & P_{24} &= 3.15966\cdots \\ p_{48} &= 3.13935\cdots & P_{48} &= 3.14609\cdots \\ p_{96} &= 3.14103\cdots & P_{96} &= 3.14271\cdots \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

$p_{96} < \pi < P_{96}$ より、確かに $\pi \fallingdotseq 3.14$ だということがわかる。ただし、これらの値は

```
p[6] = 3
Table[N[p[3*2^n], 10], {n, 1, 5}]
Table[N[P[3*2^n], 10], {n, 1, 5}]
```

の結果を用いた。

1.1.4　アルキメデスが実際に使用した式

三角関数という便利な関数があるからこそ、式 (1.2) を求めることができた。しかし、先ほども触れたように、アルキメデスが存在していた時代には、その便利な関数は存在しない。彼が実際に使用した式は

$$p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}},\ P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n}$$

である。彼はこの漸化式を、その時代には知られていたピタゴラスの定理 (三平方の定理) と初等幾何学だけを用いて導き出した。その導き方は上野健爾 [6] に記載されてあるが、三角関数を用いれば簡単に確認することができる。

実際、

$$\sqrt{p_n P_{2n}} = \sqrt{n\sin\frac{\pi}{n}\cdot 2n\tan\frac{\pi}{2n}} = n\sqrt{2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}\cdot 2\tan\frac{\pi}{2n}} = 2n\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{2n}}$$
$$= 2n\sin\frac{\pi}{2n} = p_{2n},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_n}+\frac{1}{P_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n\sin\frac{\pi}{n}}+\frac{1}{n\tan\frac{\pi}{n}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n\sin\frac{\pi}{n}}+\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n\sin\frac{\pi}{n}}\right)$$
$$= \frac{1}{n\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{2n\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}}\cdot\cos^2\frac{\pi}{2n} = \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{2n\sin\frac{\pi}{2n}}$$
$$= \frac{1}{2n\tan\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{P_{2n}}.$$

1.2 建部賢弘の用いた加速法

1.2.1 イントロ

建部賢弘(1664-1739) が著した本『綴術算経』(1722) には小数第 41 位までの建部が求めた円周率が記されている[3]。建部の方法は、半径 $\frac{1}{2}$ の円の内接正 2^n $(n = 2, 3, \cdots, 10)$ 角形の周の長さを求め、加速法により高精度の円周率の近似値を推測する方法だ。小川束、平野葉一 [1] では建部が計算したこの方法を、コンピュータを利用して再現している。私はこの方法を利用して $p_{2^{20}}$ まで求めると、どのくらいの精度になるかを解説を含めながら実験してみた。

1.2.2 実験と解説

以下、円周率の真の値と小数数第 n 位まで一致することを精度 n 桁と定める。

式 (1.2) において、p_{2^n} を簡素化するために σ_n とおきかえる。すると、σ_n は次

[3]その内正しいのは小数第 40 位まで。

の式を満たす。($n \geq 2$ かつ $n \in \boldsymbol{N}$ として)

$$\sigma_{n+1} = \sqrt{2^{n+1}(2^n - \sqrt{2^{2n} - {\sigma_n}^2})},$$
$$\sigma_2 = 2\sqrt{2}.$$

そうすると σ_{20} は、

```
s0[n_]:=Sqrt[2^n(2^(n - 1) - Sqrt[2^(2(n - 1)) - s0[n - 1]^2])]
s0[2]=2N[Sqrt[2],200]
s0[20]=3.14159 26535 85093 23106 89057 95335 81234 92444 08194 23328 26678 82629
         74022 43842 71720 67749 39803 77159 97697 92773 79445 49667 19147 19097
         56877 38286 04092 86115 47339 76947 88520 63487 25934 44082 95746 186
```

という値になり、これは精度 11 桁である。ちなみに精度 11 桁であることは、

```
RealDigits[N[Pi, 100], 10, 15, -30] - RealDigits[N[s0[20], 100], 10, 15, -30]
={{0, 0, 4, 7, 0, 0, 0, 0, 7, 4, 0, -6, -3, 4, -2}, 0}
```

によって確かめた。また、下記の真の円周率の値と見比べても精度 11 桁だとわかる。[4]

```
N[Pi,180]=3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944
            59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647
            09384 46095 50582 23172 53594 08128 48111 74502 84102 70193 85211 05559
```

次にそれらの階差の比を求める。すなわち、

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_3 - \sigma_2}, \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_4 - \sigma_3}, \frac{\sigma_4 - \sigma_3}{\sigma_5 - \sigma_4}, \frac{\sigma_5 - \sigma_4}{\sigma_6 - \sigma_5}, \frac{\sigma_6 - \sigma_5}{\sigma_7 - \sigma_6}, \cdots \tag{1.4}$$

を求める。以下、結果を示す[5]。

```
s0[1]=2; e0[n_]:=(s0[n+1]-s0[n])/(s0[n+2]-s0[n+1])
Table[e0[n], {n, 18}]
 3.554865846209121036657210740898425612929669189415759008818039 14
 3.885450093317747654380547661665266360770284087650314676120929 91
 3.971154733747624221615856142353198880124883468353050218670142 02
 3.992775639082541671674380162627681310461882098139080650519247 11
 3.998193093597580832946302904091445088143325777220071043631064 64
 3.999548222374493301959058632058938645551274018862165285132291 12
 3.999887052404346826235627366653518656698440970690880141243990 5
 3.999971762901753485680150689128807515279892518188710400161262 24
```

[4]今後は桁数の増加に伴いコマンド RealDigits を使用して精度を確かめる。
[5]但し、$\sigma_1 = 2$ とした。

```
3.999992940712979991369631546043171937649523479401717732558462 03
3.999998235177466348249482145649057373280795721588368242007454 50
3.999999558794317921449691179153541391012666210727147139521260 27
3.999999889698576438761425311513207285958353258174483475815359 71
3.999999972424643919590290781682122012422864657621686001436819 43
3.999999993106160968016318548728714365759969135578017070866411 09
3.999999998276540241261501252231837660578716332030852628839248 54
3.999999999569135060268964163986342756610050124137316856616343 29
3.999999999892283765064340344179418705019758708102067403662600 56
3.999999999973070941265903792493778756262668390426903983216766 31
3.999999999993267735316464617276502397449213045286359321235932 77
```

これは明らかに、4 に近づいていることがわかる。つまり

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_{n+2}-\sigma_{n+1}}{\sigma_{n+1}-\sigma_n}=\frac{1}{4} \tag{1.5}$$

が成り立つことがわかる。この事実は建部の師匠である関孝和 $(?\text{-}1708)$ が発見したものである。よって、次のような推測ができる。

$$\sigma_n{}^{(1)}\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{4-1}(4\sigma_{n+1}-\sigma_n) \tag{1.6}$$

は σ_n よりもすばやく π に近づく (加速される)。

この推測の理由を関や建部の考え方にのっとって考えてみよう。式 (1.5) において、$n\to\infty$ としなくても成り立つとしよう。すると、数列 (1.4) を逆数にした数列

$$\frac{\sigma_3-\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1},\frac{\sigma_4-\sigma_3}{\sigma_3-\sigma_2},\frac{\sigma_5-\sigma_4}{\sigma_4-\sigma_3},\frac{\sigma_6-\sigma_5}{\sigma_5-\sigma_4},\frac{\sigma_7-\sigma_6}{\sigma_6-\sigma_5},\cdots$$

は初項 $(\sigma_3-\sigma_2)/(\sigma_2-\sigma_1)$ 、公比 $1/4$ の等比数列になる。すると、σ_n は

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sigma_1, \\
\sigma_2 &= \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1), \\
\sigma_3 &= \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_3 - \sigma_2) \\
&\fallingdotseq \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) + \frac{1}{4}(\sigma_2 - \sigma_1), \\
\sigma_4 &= \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_3 - \sigma_2) + (\sigma_4 - \sigma_3) \\
&\fallingdotseq \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) + \frac{1}{4}(\sigma_2 - \sigma_1) + \frac{1}{4^2}(\sigma_2 - \sigma_1), \\
&\vdots \\
\sigma_n &= \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_3 - \sigma_2) + \cdots + (\sigma_n - \sigma_{n-1}) \\
&\fallingdotseq \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) + \frac{1}{4}(\sigma_2 - \sigma_1) + \frac{1}{4^2}(\sigma_2 - \sigma_1) + \cdots + \frac{1}{4^{n-2}}(\sigma_2 - \sigma_1) \\
&= \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-2}}\right).
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\lim_{n\to\infty} \sigma_n \fallingdotseq \sigma_1 + \frac{4}{4-1}(\sigma_2 - \sigma_1) = \frac{1}{4-1}(4\sigma_2 - \sigma_1).
$$

もちろん、$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \pi$ である。つまり、σ_2 と σ_1 だけを用いて、π を近似することができたのだ。更に、σ_2 と σ_1 を用いるのではなく、σ_{16} と σ_{15} といったより π に近い値を用いれば、更によい近似ができる。これを一般的に表したものは式 (1.6) に他ならない。

以上のような理由から式 (1.6) の $\sigma_n^{(1)}$ は σ_n よりも加速されると推測できる。この加速されることの証明はテイラー展開を用いれば簡単にできる。

証明　$\sin x$ をテイラー展開して

$$
\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots
$$

これを用いて

$$\begin{aligned}\sigma_n &= 2^n \sin\frac{\pi}{2^n} \\ &= 2^n\left(\frac{\pi}{2^n} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^7 + \frac{1}{9!}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^9 - \cdots\right) \\ &= \pi - \frac{1}{3!}\frac{\pi^3}{2^{2n}} + \frac{1}{5!}\frac{\pi^5}{2^{4n}} - \frac{1}{7!}\frac{\pi^7}{2^{6n}} + \frac{1}{9!}\frac{\pi^9}{2^{8n}} - \cdots\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1} &= 2^{n+1} \sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \\ &= 2^{n+1}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^7 + \frac{1}{9!}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^9 - \cdots\right) \\ &= \pi - \frac{1}{3!\cdot 4}\frac{\pi^3}{2^{2n}} + \frac{1}{5!\cdot 16}\frac{\pi^5}{2^{4n}} - \frac{1}{7!\cdot 64}\frac{\pi^7}{2^{6n}} + \frac{1}{9!\cdot 256}\frac{\pi^9}{2^{8n}} - \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{4-1}&(4\sigma_{n+1} - \sigma_n) \\ &= \frac{4}{3}\left(\pi - \frac{1}{3!\cdot 4}\frac{\pi^3}{2^{2n}} + \frac{1}{5!\cdot 16}\frac{\pi^5}{2^{4n}} - \frac{1}{7!\cdot 64}\frac{\pi^7}{2^{6n}} + \frac{1}{9!\cdot 256}\frac{\pi^9}{2^{8n}} - \cdots\right) \\ &\qquad - \frac{1}{3}\left(\pi - \frac{1}{3!}\frac{\pi^3}{2^{2n}} + \frac{1}{5!}\frac{\pi^5}{2^{4n}} - \frac{1}{7!}\frac{\pi^7}{2^{6n}} + \frac{1}{9!}\frac{\pi^9}{2^{8n}} - \cdots\right) \\ &= \pi - \frac{1}{4\cdot 5!}\frac{\pi^5}{2^{4n}} - \frac{5}{16\cdot 7!}\frac{\pi^7}{2^{6n}} - \frac{21}{64\cdot 9!}\frac{\pi^9}{2^{8n}} - \cdots\end{aligned}$$

よって、σ_n は 4^{-n} のオーダーで π に近づくが、${\sigma_n}^{(1)}$ は 16^{-n} のオーダーで π に近づく。よって加速された[6]。■

実際に加速されたかどうかを確かめるため、${\sigma_{19}}^{(1)}$ の実験結果を記す。

```
s1[n_] := (4s0[n + 1] - s0[n])/3
s1[19]=3.14159 26535 89793 23846 26349 45494 49242 74287 05087 19413 56259 41337
         95233 71577 56520 80006 99117 16919 58125 64975 18427 96424 99399 72089
         32742 84929 05016 55600 82231 95882 82414 35465 12714 60901 25247 701
```

これは精度 22 桁である[7]。σ_{20} に比べ精度が 11 桁も増えたことがわかる。

[6] 4^{-n} のオーダーとは、「n 桁計算するのに 4^{-n} に比例する誤差をともなう」という意味。

[7] 精度 22 桁であることは先ほどと同様に数式処理ソフト Mathematica でコマンド RealDigits を利用した。

先ほどと同じように、今度は ${\sigma_n}^{(1)}$ の階差の比を求める。すなわち、

$$\frac{{\sigma_2}^{(1)}-{\sigma_1}^{(1)}}{{\sigma_3}^{(1)}-{\sigma_2}^{(1)}},\frac{{\sigma_3}^{(1)}-{\sigma_2}^{(1)}}{{\sigma_4}^{(1)}-{\sigma_3}^{(1)}},\frac{{\sigma_4}^{(1)}-{\sigma_3}^{(1)}}{{\sigma_5}^{(1)}-{\sigma_4}^{(1)}},\frac{{\sigma_5}^{(1)}-{\sigma_4}^{(1)}}{{\sigma_6}^{(1)}-{\sigma_5}^{(1)}},\frac{{\sigma_6}^{(1)}-{\sigma_5}^{(1)}}{{\sigma_7}^{(1)}-{\sigma_6}^{(1)}},\dots$$

を求める。以下、実験結果を記す。

```
d0[n_] := s0[n + 1] - s0[n]
e0[n_] := d0[n]/d0[n + 1]
Table[N[e1[n], 50], {n, 18}]
15.098628968622743998087840795925151646323433405301502295571188 45
15.770192592141822631029855896589021087582490883745095286088787 94
15.942265026794338750492650315588877371953328524450672418586597 77
15.985548497236192633767877725229409403553423891316624697288571 07
15.996386013334177358185433392360736947101922183686065930049323 14
15.999096433881847931278785493761929510311717904594714092174455 80
15.999774104129484560598955753853996822772818987960690824578757 94
15.999943525761056201165588455721567285035861622462323521247256 212
15.999985881423306806446574136489641758492728963914900501554055 19
15.999996470354766872931366207580106616813226348082525813903295 21
15.999999117588625478925637086944342817296240381454404342118862 83
15.999999779397152229774479506204321729104837324798969163040744 85
15.999999944849287798696308180479081206426002375643207877417534 69
15.999999986212321933502370008088296953596057646299869983953329 91
15.999999996553080482364860811332185692791614973832484083181897 06
15.999999999138270120528044472151249928755780868667662539956103 10
15.999999999784567530128062947369986475343442994986116624910346 17
15.999999999946141882531768976175754153940159401779657832297906 0
```

これは明らかに 16 に近づいていることがわかる。したがって、式 (1.6) の証明と同様な理屈で加速させることができる。

$${\sigma_n}^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{16-1}(16\sigma_{n+1}^{(1)}-\sigma_n^{(1)})$$

と ${\sigma_n}^{(2)}$ を定めれば、それは ${\sigma_n}^{(1)}$ よりも加速する。今回の場合は、64^{-n} のオーダーで π に近づく。実験結果を見てみよう。下の値は ${\sigma_{18}}^{(2)}$ の値である。

```
s2[n_] := (16s1[n + 1] - s1[n])/15
s2[18]=3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50285 53436 31858 74974 35048 78444
         80832 73026 72778 86794 48301 69192 03378 39176 69627 02735 60161 85307
         09471 72761 19015 56338 02750 43963 09276 57391 09199 78135 86596 171
```

これは精度 33 桁である。更に 11 桁もの正しい値を求められた。

ここまで求められれば、次のような推測ができる。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{\sigma_{n+2}}^{(k)}-{\sigma_{n+1}}^{(k)}}{{\sigma_{n+1}}^{(k)}-{\sigma_n}^{(k)}}=\frac{1}{4^k}$$

この推測の下で、全く同様な理屈で ${\sigma_n}^{(k)}$ を

$$ {\sigma_n}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4^k-1}(4^k\sigma_{n+1}-\sigma_n) \quad (k=3,4,5,\ldots,19,\ n=1,2,\ldots,20-k) $$

と定め求めることによってさらに加速することができる。以下は紙の無駄であるかもしれないが、実験結果を記す。どのように加速していくかを見ていただきたい。

${\sigma_{17}}^{(3)}$

```
s3[n_] := ((4^3)s2[n + 1] - s2[n])/(4^3-1)
s3[17]=3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 14488 40114 58992
         39636 05667 14030 79487 54289 92209 54598 52252 96465 79591 36940 42318
         43735 67735 90119 35074 53419 51532 06542 93597 35151 39122 67208 157
```

精度 44 桁 (前 +11 桁)

${\sigma_{16}}^{(4)}$

```
s4[n_] := ((4^4)s3[n + 1] - s3[n])/(4^4-1)
s4[16]=3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 70135
         16170 97963 29613 86497 63279 45201 96202 05727 41629 69069 60146 69529
         18167 37262 67116 71133 41902 51615 27644 59711 87605 02385 11200 981
```

精度 55 桁 (前 +11 桁)

${\sigma_{15}}^{(5)}$

```
s5[n_] := ((4^5)s4[n + 1] - s4[n])/(4^5-1)
s5[15]=3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944
         59230 75330 26453 76446 15513 42514 69353 25250 20298 78533 53661 29893
         39688 15451 68852 84008 71203 09023 33803 27653 01348 09651 70477 184
```

精度 65 桁 (前 +10 桁)

${\sigma_{14}}^{(6)}$

```
s6[n_] := ((4^6)s5[n + 1] - s5[n])/(4^6-1)
s6[14]=3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944
         59230 78164 06286 15938 40261 13114 65399 22887 25748 99823 57769 91999
         49387 99895 18669 25568 89324 79499 76928 19633 61830 57611 52602 81
```

精度 74 桁 (前 +9 桁)

${\sigma_{13}}^{(7)}$

```
s7[n_] := ((4^7)s6[n + 1] - s6[n])/(4^7-1)
s7[13]=3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944
         59230 78164 06286 20899 86280 07999 06138 40288 19346 57852 43622 83533
         02948 83391 49926 74543 96046 08848 55686 01341 35909 46619 08544 659
```

精度 84 桁 (前 +10 桁)

${\sigma_{12}}^{(8)}$

```
s8[n_] := ((4^8)s7[n + 1] - s7[n])/(4^8-1)
s8[12]=3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944
         59230 78164 06286 20899 86280 34825 34207 09240 91667 36134 06109 21273
         34362 76181 69859 12684 16721 19913 35242 05025 37190 00527 788
```

精度 92 **桁** (**前** $+8$ **桁**)

$\sigma_{11}{}^{(9)}$

```
s9[n_] := ((4^9)s8[n + 1] - s8[n])/(4^9-1)
s9[11]=3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944
         59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 81889 56019 79346 03954
         72259 81936 70713 33360 99458 72577 01269 73411 99863 37558 26688 078
```

精度 100 **桁** (**前** $+8$ **桁**)

$\sigma_{10}{}^{(10)}$

```
s10[n_] := ((4^10)s9[n + 1] - s9[n])/(4^10-1)
s10[10]=3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944
          59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08650 84733 14528
          47568 30814 06028 28084 25442 90632 69155 48382 26081 26886 42686 832
```

精度 108 **桁** (**前** $+8$ **桁**)

$\sigma_{9}{}^{(11)}$

```
s11[n_] := ((4^11)s10[n + 1] - s10[n])/(4^11-1)
s11[9]=3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944
         59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06345
         33318 77603 63355 02202 56744 95761 52266 08052 33384 22541 91717 717
```

精度 116 **桁** (**前** $+8$ **桁**)

$\sigma_{8}{}^{(12)}$

```
s12[n_] := ((4^12)s11[n + 1] - s11[n])/(4^12-1)
s12[8]=3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944
         59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647
         09377 98736 42760 78488 48034 67301 64643 67829 90788 39734 48615 381
```

精度 122 **桁** (**前** $+6$ **桁**)

$\sigma_{7}{}^{(13)}$

```
s13[n_] := ((4^13)s12[n + 1] - s12[n])/(4^13-1)
s13[7]=3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944
         59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647
         09384 46095 02557 07930 72540 95910 55402 09245 54243 73225 26961 031
```

精度 129 **桁** (**前** $+7$ **桁**)

$\sigma_{6}{}^{(14)}$

```
s14[n_] := ((4^14)s13[n + 1] - s13[n])/(4^14-1)
s14[6]=3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944
         59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647
```

```
        09384 46095 50582 10729 54873 66646 18804 19335 95988 59454 85831 059
```

精度 134 桁 (前 $+5$ 桁)

$\sigma_5{}^{(15)}$

```
s15[n_] := ((4^15)s14[n + 1] - s14[n])/(4^15-1)
s15[5]=3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944
        59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647
        09384 46095 50582 23172 42237 25046 26349 14147 37643 96728 91717 642
```

精度 139 桁 (前 $+5$ 桁)

$\sigma_4{}^{(16)}$

```
s16[n_] := ((4^16)s15[n + 1] - s15[n])/(4^16-1)
s16[4]=3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944
        59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647
        09384 46095 50582 23172 53593 71336 09917 53759 40678 68075 36405 138
```

精度 143 桁 (前 $+4$ 桁)

$\sigma_3{}^{(17)}$

```
s17[n_] := ((4^17)s16[n + 1] - s16[n])/(4^17-1)
s17[3]=3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944
        59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647
        09384 46095 50582 23172 53594 08124 22189 85766 60717 46760 74953 312
```

精度 148 桁 (前 $+5$ 桁)

$\sigma_2{}^{(18)}$

```
s18[n_] := ((4^18)s17[n + 1] - s17[n])/(4^18-1)
s18[2]=3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944
        59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647
        09384 46095 50582 23172 53594 08128 47934 52859 37669 93119 35
```

精度 150 桁 (前 $+2$ 桁)

$\sigma_1{}^{(19)}$

```
s19[n_] := ((4^19)s18[n + 1] - s18[n])/(4^19-1)
s19[1]=3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944
        59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647
        09384 46095 50582 23172 53594 08128 48111 47875 55627 46424 16654 26
```

精度 154 桁 (前 $+4$ 桁)

見ていただければわかるように、最終的に 154 桁もの正しい円周率の値を求めることができた。建部は内接正 2^{10} 角形の値まで ($\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{10}$ まで) 求めて、精度 40 桁にたどり着いたのだが、もし今回の実験のように建部が内接正 2^{20} 角形の値まで ($\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{20}$ まで) 求めていたら、精度 154 桁というその時代の最大の記録までたどり着いていただろう。しかし、建部の時代はもちろんコンピュー

タという便利なものは存在しない。建部はそろばんを利用して計算をしていたのだ。ちなみに ${\sigma_1}^{(19)}$ の値は数式処理ソフト Mathematica を使っても 40 分近くの時間を費やした。もし建部が ${\sigma_1}^{(19)}$ の値をそろばんで求めていたら、その計算で一生を費やすことになっていたのかもしれない。

第2章　逆正接関数(arctan)

この章では、逆正接関数を用いた円周率を求める公式を紹介する。

2.1　マーダヴァ・グレゴリー・ライプニッツ級数

インドで発見された円周率を表す公式

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots\right) \tag{2.1}$$

はマーダヴァ(1340-1425?)による公式と信じられている。この式を 2 つの方法で証明しようと思う。

2.1.1　証明 1

この証明には交代級数についてのライプニッツの定理と、アーベルの連続定理を用いる。最初に、この 2 つの定理を紹介しておく。

ライプニッツの定理

数列 $\{a_n\}$ に絶対値を付けた数列 $\{|a_n|\}$ が減少関数であるような交代級数[a] は収束する。

[a]式 (2.1) のような $+$ と $-$ が交互に出現する級数

アーベルの連続定理

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が収束するならば、

$$\lim_{t\to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

が成り立つ。

この 2 つの定理を用いて証明をする。

証明　$|x|<1$ のとき

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

ここで両辺を不定積分すると、

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}dx$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

ライプニッツの定理によって右辺の級数は $x=1$ で収束する。また、アーベルの連続定理によって $x=1$ での値は $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ に等しい。.■

2.1.2　証明 2

特別な定理を使用しないのでこちらの方が簡単か。

証明　$x\in \boldsymbol{R}$ のとき $-x^2\neq 1$ であるから、等比数列の和の公式より

$$\sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k = \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{1+x^2}.$$

両辺を積分すると、

$$\underbrace{\int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k dx}_{L_n} = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx}_{R_n^1} \underbrace{- \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx}_{R_n^2}.$$

ところで、L_n, R_n^1, R_n^2 を上記のようにおくと

$$L_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 x^{2k}dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad R_n^1 = \frac{\pi}{4}$$

また、$\dfrac{1}{1+x^2} \leqq 1$ であるから $\dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leqq x^{2n+2}$ となるので、

$$|R_n^2| = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx \leqq \int_0^1 x^{2n+2}dx = \left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+3} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

ゆえに、

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} \left(R_n^1 + R_n^2\right)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\pi}{4} + 0\right) = \frac{\pi}{4}.\blacksquare$$

2.2 ジョン・マチンの公式

ジョン・マチン (1680-1752) は公式

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{239} \tag{2.2}$$

を 1706 年に発表し、これを用いて当時の最高記録 100 桁を求めた。最高記録更新のために使われたのはその年だけではなく、1874 年にウィリアム・シャンクスが 527 桁、1949 年に汎用電子計算機 ENIAC で 2037 桁など、最高記録更新に深く関わってきた。この公式の考え方は `http://member.nifty.ne.jp/Fe/other/math/atan_pi.html` で紹介されている。ここでは、この式の証明を考える。

2.2.1 証明

証明 $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。$\tan\theta$ の加法定理から

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}. \tag{2.3}$$

ここで

$$a = \tan\alpha,\ b = \tan\beta$$

とおくと、

$$\arctan a = \alpha, \arctan b = \beta$$

となる。また、式 (2.3) は

$$\alpha + \beta = \arctan \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

と変形できるので、結局、

$$\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab} \tag{2.4}$$

となる。また、

$$2\arctan a = \arctan \frac{2a}{1-a^2} \tag{2.5}$$

とも変形できる。この式 (2.5) を用いて

$$2\arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{\dfrac{2}{5}}{1 - \dfrac{1}{25}} = \arctan \frac{5}{12}$$

同様にして、

$$4\arctan \frac{1}{5} = 2\arctan \frac{5}{12} \arctan \frac{\dfrac{5}{12}\cdot 2}{1 - \left(\dfrac{5}{12}\right)^2} = \arctan \frac{120}{119}$$

ゆえに、式 (2.4) より $(-\arctan\theta = \arctan(-\theta)$ に注意して$)$

$$\begin{aligned}(\text{式 } (2.2) \text{ の右辺}) &= \arctan \frac{120}{119} + \arctan\left(-\frac{1}{239}\right) = \arctan \frac{\dfrac{120}{119} + \dfrac{1}{239}}{1 + \dfrac{120}{119}\cdot\dfrac{1}{239}} \\ &= \arctan \frac{239\cdot 120 - 119}{239\cdot 119 + 120} = \arctan 1 = (\text{式 } (2.2) \text{ の左辺 }).\blacksquare\end{aligned}$$

2.3 アブラハム・シャープの公式

アブラハム・シャープ $(1651\text{-}1742)$ は下記の公式を用いて、当時の最高記録桁数 71 桁を 1699 年に記録した。

$$\frac{\pi}{6} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^n}.$$

2.4　チャールズ・ハットンの公式

1776 年にチャールズ・ハットン (1737-1823) が見つけた公式がある。

$$\begin{aligned}(2.6)\quad \frac{\pi}{4} &= 2\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}\\ &= 2\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{7}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=3\arctan\frac{1}{4}+\arctan\frac{5}{99}\end{aligned}$$

レーマン (1800-1863) は 1853 年にこの公式を用いて、当時の最高記録 261 桁を記録した。そして、式 (2.6) については 1779 年にオイラー (1707-1783) も見つけ出した公式である。1784 年、ベガ (1754-1802) がこの公式を用いて 126 桁を記録した。

2.5　ガウスの公式

1863 年、カール・フリードリッヒ・ガウス (1777-1855) は次の公式を見つけ出した。

$$\frac{\pi}{4}=12\arctan\frac{1}{18}+8\arctan\frac{1}{57}-5\arctan\frac{1}{239}$$

1958 年にフェルトンはこの公式を使って 1 万 21 桁を記録し、更に 1961 年にはダニエル・シャンクスとジョン・レンチによって、また、1973 年にはジャン・ギユーとマルティヌ・ブイエによって用いられた。

2.6　クリゲンシュテルナの公式

$$\frac{\pi}{4}=8\arctan\frac{1}{10}-\arctan\frac{1}{239}-4\arctan\frac{1}{515}$$

これはクリゲンシュテルナが 1730 年に見つけ出した公式である。1957 年、フェルトンはこの公式を使って、7480 桁を記録した。

2.7　シュテルマーの公式

1896 年シュテルマーは次の公式を見つけ出した。

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 44\arctan\frac{1}{57}+7\arctan\frac{1}{239}-12\arctan\frac{1}{682}+24\arctan\frac{1}{12943}\\ &= 6\arctan\frac{1}{8}+2\arctan\frac{1}{57}+\arctan\frac{1}{239}\end{aligned}$$

この公式は 1961 年にダニエルシャンクスとジョン・レンチによって、1973 年にはジャン・ギユーとマルティヌ・ブイエによって用いられた。

2.8　オイラーの公式

1755 年、レオンハルト・オイラーは次の公式を見つけ出した。

$$\frac{\pi}{4} = 5 \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{3}{79}$$

2.9　高野喜久雄の公式

1982 年、高野喜久雄は次の公式を見つけ出した。

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{49} + 32 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239} + 12 \arctan \frac{1}{110443}$$

この公式は、今現在 (2004 年 2 月現在) 最高記録桁数である 1 兆 2400 億桁の樹立に使用された公式である。

第3章　AGM（算術幾何平均）

関連図書

[1] 小川 束(つかね)、平野葉一、『数学の歴史』、朝倉書店 (2003)

[2] ジャン = ポール・ドゥラエ　著、畑　政義　訳、『π の魅力』、朝倉書店 (2001)

[3] 安野光雅、上野健爾(けんじ)　他、『数学文化』、日本評論社 (2003)

[4] 森口繁一、『数値計算術』、共立出版株式会社 (1987)

[5] 金田康正、『π のはなし』、東京書籍 (1991)

[6] 上野健爾(けんじ)、『円周率 π をめぐって』、日本評論社 (1999)

[7] 杉原正顯(まさあき)、室田一雄、『数値計算法の数理』、岩波書店 (1994)

[8] 松元隆二、『円周率の公式集』
http://www.pluto.ai.kyutech.ac.jp/plt/matumoto/pi_small/_pi_small.html

[9] 江沢 洋(ひろし)、『漸近解析』、岩波書店 (1995)

[10] FFT と AGM による円周率計算プログラム
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ooura/pi_fft-j.html

[11] 無限級数の収束判定法
http://phaos.hp.infoseek.co.jp/part2/sequence/limit/appendices/criteria.htm

[12] あっし、π の桁数の伸び
http://hp.vector.co.jp/authors/VA014765/pi/digit.html

[13] Kusuto、π 計算の歴史
http://www1.coralnet.or.jp/kusuto/PI/HISTORY/

[14] Toshio Yamada、**偶然現象の数理**
http://www.ritsumei.ac.jp/se/~rp009007/t_yamada/finance.pdf