楕円領域での Laplacian の差分近似のために

桂田 祐史

2005 年 2 月 11 日

1　はじめに

伝統的な差分法は本質的に、四角い領域に対して有効な方法である。問題の領域を適当な写像によって四角い領域 (「計算領域」と呼ばれる) に写して、そこを格子に切って差分近似することになる。

もっとも簡単なのは円盤領域の問題を極座標

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{1}$$

を用いて解析したりする場合であるが、ここでは楕円領域

$$\Omega := \left\{(x,y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right\} \tag{2}$$

を考えてみる (a, b は正の定数である)。

$$x = ar\cos\theta, \quad y = br\sin\theta \tag{3}$$

により、

$$D = \{(r,\theta); 0 \le r < 1,\ 0 \le \theta < 2\pi\}$$

と対応する。

このとき Laplacian $\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ はどうなるか？

2　極座標でウォーミングアップ

普通の極座標の場合にどうやって計算するかは、多変数の微分法の標準的な練習問題であるが、Mathematica を使うと次のように簡単にすんでしまう。

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta, \tag{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}r\cos\theta \tag{5}$$

これを $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial\theta$ について解く。

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{\partial f}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{\partial f}{\partial\theta} \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}. \end{aligned}$$

これで x, y で微分するという操作を r, θ で表わすことが出来た。後はこれを計算機に教えてやるだけだ。

```
oyabun% math
Mathematica 4.0 for Solaris
Copyright 1988-1999 Wolfram Research, Inc.
 -- Motif graphics initialized --

In[1]:= Dx[f_]:=Cos[t]D[f,r]-Sin[t]D[f,t]/r

In[2]:= Dy[f_]:=Sin[t]D[f,r]+Cos[t]D[f,t]/r

In[3]:= Simplify[Dx[Dx[f[r,t]]]+Dy[Dy[f[r,t]]]]

          (0,2)           (1,0)
         f      [r, t]   f      [r, t]     (2,0)
Out[3]= ------------ + ------------ + f      [r, t]
               2              r
              r

In[4]:=
```

この結果は

$$\triangle f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$$

を意味する。

3 極座標もどき

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}a\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}b\sin\theta, \tag{6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x}ar\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}br\cos\theta \tag{7}$$

これを $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial \theta$ について解く。

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta & b\sin\theta \\ -ar\sin\theta & br\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{abr} \begin{pmatrix} br\cos\theta & -b\sin\theta \\ ar\sin\theta & a\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\cos\theta}{a}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{ar}\frac{\partial f}{\partial \theta},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sin\theta}{b}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{br}\frac{\partial f}{\partial \theta},$$

```
oyabun% math
Mathematica 4.0 for Solaris
Copyright 1988-1999 Wolfram Research, Inc.
 -- Motif graphics initialized --

In[1]:= Dx[f_]:=Cos[t]D[f,r]/a-Sin[t]D[f,t]/(a r)

In[2]:= Dy[f_]:=Sin[t]D[f,r]/b+Cos[t]D[f,t]/(b r)

In[3]:= Simplify[Dx[Dx[f[r,t]]]+Dy[Dy[f[r,t]]]]

                 2    2             (0,1)
Out[3]= (-((a  - b ) Sin[2 t] f      [r, t]) +

             2        2    2        2   (0,2)
>       (a  Cos[t]  + b  Sin[t] ) f      [r, t] +

                2        2    2        2   (1,0)
>       r ((a  Cos[t]  + b  Sin[t] ) f      [r, t] +
```

```
                2    2             (1,1)
>          (a  - b ) Sin[2 t] f      [r, t] +

                  2        2    2        2   (2,0)               2  2  2
>          r (b  Cos[t]  + a  Sin[t] ) f      [r, t])) / (a  b  r )
```

In[4]:=

$\varphi(\theta) := a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$ とおくと、

$$\begin{aligned}\triangle f = \frac{1}{a^2b^2r^2}\Bigg[&\left(b^2-a^2\right)\sin 2\theta\,\frac{\partial f}{\partial\theta} + \varphi(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\\ &+r\left(\varphi(\theta)\frac{\partial f}{\partial r} + \left(a^2-b^2\right)\sin 2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta} + r\left(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)\Bigg]\end{aligned}$$

$a = b = R$ の場合、$\varphi(\theta) = R^2$ であるから、

$$\triangle f = \frac{1}{R^4r^2}\left(0 + R^2\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + r\left(R^2\frac{\partial f}{\partial r} + 0 + rR^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)\right) = \frac{1}{R^2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right).$$

確かに円盤領域のラプラシアンと一致する。