

2022 年度 信号処理とフーリエ変換 期末試験問題

2023 年 1 月 25 日 (水曜) 15:00~16:00 施行

担当 桂田 祐史

ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

以下の 6 問から 5 問を選択して解答せよ。解答の順番は自由である (各問の解答は一箇所にまとめること)。

問 1. f と g は \mathbb{R} で定義された周期 2π の周期関数であり、 $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ ($0 \leq x < 2\pi$), $g(x) = \cos \frac{x}{2}$ ($0 \leq x < 2\pi$) を満たすとする。このとき、以下の問に答えよ。

(1) f と g のグラフを描け。(2) f と g の Fourier 級数を求めよ (\cos, \sin を用いるもの)。(3) f と g の Fourier 級数のうち、一様収束するのはどちらか、Gibbs の現象を起こすのはどちらか、それぞれ理由をつけて答えよ。

問 2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は周期 2π の周期関数で、連続かつ区分的に C^1 級とする。

$$g(x) := \begin{cases} f'(x) & (f \text{ が } x \text{ で微分可能であるとき}) \\ 0 & (f \text{ が } x \text{ で微分可能でないとき}) \end{cases}$$

で $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を定めるとき、 f の Fourier 係数と g の Fourier 係数の間に成り立つ関係を述べて証明せよ。

問 3. (1) \mathbb{R} を定義域とする関数 f の Fourier 変換 $\mathcal{F}f$, 共役 Fourier 変換 \mathcal{F}^*f の定義を記せ。
 (2) 一般に $\mathcal{F}[\mathcal{F}f](\xi) = f(-\xi)$ ($\xi \in \mathbb{R}$) が成り立つことの根拠を示せ。反転公式は既知として良い。
 (3) $a > 0$ に対して、関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|x| < a) \\ 0 & (|x| \geq a), \end{cases} \quad g(x) = \text{sinc}(ax) \quad (x \in \mathbb{R}, \text{ただし } \text{sinc } x = \frac{\sin x}{x})$$

で定めるとき、 f と g の Fourier 変換 $\mathcal{F}f, \mathcal{F}g$ を求めよ。結果だけでなく根拠 (簡単な途中経過) を書くこと。

問 4. $N \in \mathbb{N}$ に対して $\omega := e^{\frac{2\pi i}{N}}$ とおく。周期 N の周期数列 $f, g, h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 $f * g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(n-k)g(k)$ ($n \in \mathbb{Z}$), $\mathcal{F}h(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} h(j)\omega^{-nj}$ ($n \in \mathbb{Z}$) とおく。

(1) $f * g$ と $\mathcal{F}h$ はともに周期 N の周期数列であることを示せ。(2) $h = f * g$ であるとき、 $\mathcal{F}h(n) = N\mathcal{F}f(n)\mathcal{F}g(n)$ ($n \in \mathbb{Z}$) が成り立つことを示せ。

問 5. 連続関数 $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき、2つの条件

(1a)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad ((x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)),$$

(1b)
$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

を満たす u を求めたい (波動方程式の初期値問題)。

(1) $\hat{u}(\xi, t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{-ix\xi} dx$ の満たす微分方程式の初期値問題を導き、それを解け。ただし、 $x \rightarrow \pm\infty$ のとき $\psi(x)$ は急速に 0 に近づくとする (ψ の Fourier 変換が存在するための仮定)。

(2) (1) で求めた \hat{u} を逆 Fourier 変換することによって、 u を求めよ。(この問題の解の公式は有名であり、それによると $u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(y) dy$ となる。検算のために用いると良い。)

問 6. (1) 単位インパルス、単位インパルス応答とは何か、説明せよ。(2) 連続信号 $X(t) = e^{it}$ ($t \in \mathbb{R}$) をサンプリング周波数 f_s でサンプリングして得られた離散信号を $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ とするとき、以下の問に答えよ。

(a) x_n をなるべく簡単な式で表せ。

(b) LTI フィルター F の単位インパルス応答を h とする。 $y := F[x]$ とするとき、 y_n を x_n と h で表わせ。

略解

出題パターンはかなり限定されていて(授業でも公言している)、特に問3, 4は「今年は何れが出題されるか」なんだけど、準備していない人が多かった印象。

問1 解説

(1) f と g の $-10 \leq x \leq 10$ の範囲のグラフはそれぞれ次のようになる。

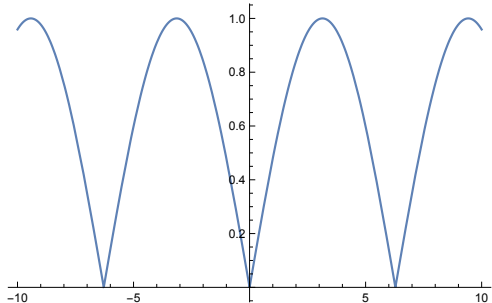


図 1: f のグラフ

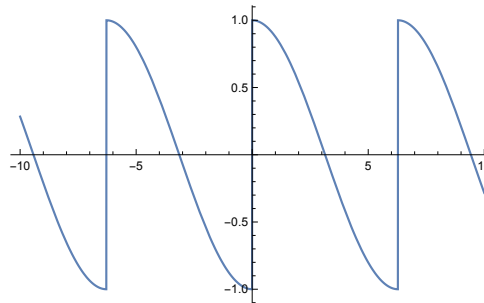


図 2: g のグラフ

(2) f は偶関数であるから \cos のみ、 g は奇関数であるから \sin のみで展開される。

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(1-4n^2)\pi} \cos nx,$$

$$g(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{(1-4n^2)\pi} \sin nx.$$

(3) f は連続かつ区分的に C^1 級であるから、 f の Fourier 級数は一様収束する。また g は不連続かつ区分的に C^1 級であるから、 g の Fourier 級数については Gibbs の現象が起こる。■

- (1) について: 偶関数・奇関数であるか、連続かどうか分かるように(1周期を超えて)グラフを描きなさい、と授業で指導している。それが出来なかった人は以下正しく解けない。
- (2) f は偶関数、 g は奇関数である。それを見落とすと間違える。cos だから偶関数、sin だから奇関数と短絡的に考えないように。(これはレポート課題1でやっていて、授業で解説したのだけど…)
- (3) 「連続かつ区分的 C^1 級ならば一様収束」「不連続かつ区分的 C^1 級ならば Gibbs の現象が起こる」この2つは覚えて欲しい。後者は有名だけれど、前者とセットで覚えることで関数の連続性の影響が理解できる。なぜか「一様収束するので Gibbs の現象が起こる」と書いた人が複数いた(ちょっとひどい)。

問2 解説 f が連続かつ区分的に C^1 級であるから、ある $\{x_j\}_{j=0}^m$ が存在して

$$-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = \pi,$$

各 $j \in \{1, \dots, m\}$ について f は $[x_{j-1}, x_j]$ で C^1 級である。

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \left(\frac{\sin nx}{n} \right)' dx \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m \left\{ \left[f(x) \frac{\sin nx}{n} \right]_{x_{j-1}}^{x_j} - \int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(x) \frac{\sin nx}{n} dx \right\} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx = -\frac{1}{n} b_n(g), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \left(\frac{-\cos nx}{n} \right)' dx \\
&= -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m \left\{ \left[f(x) \frac{\cos nx}{n} \right]_{x_{j-1}}^{x_j} - \int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(x) \frac{\cos nx}{n} dx \right\} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{n} a_n(g).
\end{aligned}$$

ゆえに $a_n(f) = -\frac{b_n(g)}{n}$, $b_n(f) = \frac{a_n(g)}{n}$. ■

- 微分と Fourier 変換の関係は重要で、毎年何らかの形で出題する。普通の Fourier 変換の場合は「 $\mathcal{F}[f'](\xi) = i\xi \mathcal{F}f(\xi)$ 」を示せとか。今回は周期関数の Fourier 変換 (Fourier 係数) がお題。証明の要点はどちらの場合も「部分積分する」。上の解答は $\cos nx$, $\sin nx$ を使う展開の場合を書いたが、複素指数関数 e^{inx} で書いても正解とする。
- f が C^1 級の場合は、積分区間を分割する必要がなくて、少し簡単になる。その場合の証明を書いた場合は部分点を与える。

問 3 解説

(1)

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx, \quad \mathcal{F}^*g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{ix\xi} d\xi.$$

(2) 一般に $\mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}^*f(-\xi)$ であるから

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}f](\xi) = \mathcal{F}^*[\mathcal{F}f](-\xi).$$

反転公式 $\mathcal{F}^* \circ \mathcal{F} = \text{id}$ より

$$\mathcal{F}^*[\mathcal{F}f](-\xi) = f(-\xi).$$

ゆえに

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}f](\xi) = f(-\xi).$$

(3)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \frac{1}{2a} \cdot e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{2a\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \right]_{x=-a}^{x=a} \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ia\xi} - e^{-i(-a)\xi}}{-i\xi} = \frac{1}{a\xi\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ia\xi} - e^{-ia\xi}}{2i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(a\xi)}{a\xi}.
\end{aligned}$$

ゆえに $\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}g(\xi)$. よって

$$f(-\xi) = \mathcal{F}\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}g(\xi).$$

ゆえに (f が偶関数であることに注意して)

$$\mathcal{F}g(\xi) = \sqrt{2\pi}f(-\xi) = \sqrt{2\pi}f(\xi) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} & (|\xi| < a) \\ 0 & (|\xi| > a). \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} & (|\xi| < a) \\ 0 & (|\xi| > a). \end{cases}$$

- (1) 共役 Fourier 変換が書けない、書いても反転公式が成り立たないものを書いている人 (例えば $\mathcal{F}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx$, $\mathcal{F}^*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{ix\xi} d\xi$ とか。それぞれ単独ではあり得るけれど、反転公式 $\mathcal{F}^*\mathcal{F}f = f$ が成り立たないので満点がつけられない) が少なくない。
- (2) 「 $\mathcal{F}f = g$ であれば、 $\mathcal{F}g(\xi) = f(-\xi)$ である」というのは覚えるべきこと。(3) で使う (例えば複素関数論で計算したり、使わないで済ませることも出来なくはないけれど)。この内容は、上で述べた 3 セットのうち、2 セットで現れる。なぜそうなるか説明できないといけない。

- (3) 「覚えるべき Fourier 変換」(見出しにもしている) として授業で5つの関数(3セットと数えることもできる)あげてある。試験では公式の導出を書けるようにしておこう、と言ってある(授業に出ていなくても過去問を見れば分かると思うのだが…)。毎年3セットのどれかを出题している。今回は $[-a, a]$ の定義関数(面積が1になるように $2a$ で割ってある) と $\text{sinc}(ax)$ のペア。

問題を見た瞬間に「意地悪な引っかけ問題でもない限り、 $\mathcal{F}f = \text{定数 } g$, $\mathcal{F}g = \text{定数 } f$ となるはず」と思うべきである。自分で計算してそうならなかったら、計算ミスをしている。

- $\mathcal{F}f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx$ のように書いた人がいるけれど、左辺は ξ を省略せず $\mathcal{F}f(\xi)$ と書くべきである。 x で積分するので x は消えるけれど ξ だけは残る、ということを正しく理解しているか問題で、省略すべきではない。特に定義を書きなさい、という問の答えとしてはマズイ(レッドカード出したくらい)。
- 偶関数、奇関数を使って式変形したつもりの人がいるけれど、 e^{-ix} は偶関数でも奇関数でもない。気をつけて。

問4解説

- (1) f が周期 N ということは、任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対して $f(j+N) = f(j)$ が成り立つということである。ゆえに任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$f * g(n+N) = \sum_{k=0}^{N-1} f((n+N)-k)g(k) = \sum_{k=0}^{N-1} f(n-k)g(k) = f * g(n).$$

$\omega = e^{2\pi i/N}$ は $\omega^N = 1$ と満たすので、任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して $\omega^{kN} = (\omega^N)^k = 1^k = 1$ 。ゆえに任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\mathcal{F}h(n+N) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} h(j)\omega^{-(n+N)j} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} h(j)\omega^{-nj} = \mathcal{F}h(n).$$

- (2) $h := f * g$ とおくと

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](n) &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} h(j)\omega^{-nj} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} f(j-k)g(k) \right) \omega^{-nj} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^{N-1} f(j-k)g(k)\omega^{-nj} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^{N-1} f(j-k)\omega^{-nj} \right) g(k). \end{aligned}$$

右辺の () 内の \sum を変数(添字)変換する。 $l = j - k$ とおくと、 $j = 0$ のとき $l = -k$, $j = N - 1$ のとき $l = N - 1 - k$, $j = l + k$, $\omega^{-nj} = \omega^{-in(l+k)} = \omega^{-nl}\omega^{-nk}$ であるから、

$$\sum_{j=0}^{N-1} f(j-k)\omega^{-nj} = \sum_{l=-k}^{N-1-k} f(l)\omega^{-nl}\omega^{-nk} = \omega^{-nk} \sum_{l=-k}^{N-1-k} f(l)\omega^{-nl}.$$

数列 $l \mapsto f(l)e^{-nl}$ は周期 N の周期数列であるから、 $l = -k, -k + 1, \dots, N - 1 - k$ に対する和は $l = 0, 1, \dots, N - 1$ に対する和に等しい。

$$\sum_{l=-k}^{N-1-k} f(l)\omega^{-nl} = \sum_{l=0}^{N-1} f(l)\omega^{-nl}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\omega^{-nk} \sum_{l=-k}^{N-1-k} f(l)\omega^{-nl} \right) g(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f(l)\omega^{-nl} \sum_{k=0}^{N-1} g(k)\omega^{-nk} \\ &= N\mathcal{F}f(n)\mathcal{F}g(n). \blacksquare \end{aligned}$$

- (1) の後半、別証明を書いた人がいてちょっと感心 (もちろん授業で紹介した証明でなくても正しければ満点)。
- (2) 授業で言っているようにほぼ毎年出題している。Fourier ファミリーは4人家族なので、4パターンのうちどれを出すか。要点は4つのどれも同じで「定義式を使って、積分または \sum の順番を変えて、変数変換して…」。

問5 解説

(1)

$$\frac{d^2}{dt^2} \hat{u}(\xi, t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi, t), \quad \hat{u}(\xi, 0) = 0, \quad \frac{d}{dt} \hat{u}(\xi, 0) = \hat{\psi}(\xi).$$

(一見難しそうだが) 任意に $\xi (\neq 0)$ を定めて考えると、これは単振動の方程式であり、一般解は

$$\hat{u}(\xi, t) = A \cos(\xi t) + B \sin(\xi t) \quad (A, B \text{ は任意定数}).$$

初期条件に代入して

$$A = 0, \quad \xi B = \hat{\psi}(\xi).$$

これから $A = 0, B = \frac{\hat{\psi}(\xi)}{\xi}$. ゆえに

$$\hat{u}(\xi, t) = \frac{\sin(\xi t)}{\xi} \hat{\psi}(\xi) = t \operatorname{sinc}(t\xi) \hat{\psi}(\xi).$$

なお、 $\xi = 0$ の場合は

$$\hat{u}(0, t) = A + Bt \quad (A, B \text{ は任意定数}).$$

から $A = 0, B = \hat{\psi}(0)$ であるから

$$\hat{u}(0, t) = t \hat{\psi}(0) = t \operatorname{sinc}(t\xi) \hat{\psi}(\xi) \Big|_{\xi=0}.$$

ゆえにすべての ξ に対して

$$(*) \quad \hat{u}(\xi, t) = t \operatorname{sinc}(t\xi) \hat{\psi}(\xi).$$

(2) ここで

$$G(x, t) := \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^* [\operatorname{sinc}(t\xi)] (x)$$

とおくと

$$G(x, t) = \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} \times \begin{cases} \frac{1}{2t} & (|x| < t) \\ 0 & (|x| > t) \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} & (|x| < t) \\ 0 & (|x| > t). \end{cases}$$

また

$$\sqrt{2\pi} \mathcal{F} [G(\cdot, t)] (\xi) = t \operatorname{sinc}(t\xi).$$

これを (*) に代入すると

$$\hat{u}(\xi, t) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F} [G(\cdot, t)] (\xi) \hat{\psi}(\xi) = \mathcal{F} [G(\cdot, t) * \psi] (\xi).$$

Fourier 逆変換すると ($|x - y| < t \Leftrightarrow y \in [x - t, x + t]$ に注意して)

$$u(x, t) = G(\cdot, t) * \psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t) \psi(y) dy = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(y) dy. \blacksquare$$

- 授業では熱方程式の場合の説明をした。それを復習してあれば (1) は簡単のはず。
- (2) では、問3(3)の結果 (もっとも結果自身は覚えるように言っている) を使っている。

問6 解説

(1)

$$\delta_n = \delta(n) = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \end{cases}$$

で定まる数列 $\delta = \{\delta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ のことを単位インパルスという。

デジタルフィルター $F: \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ に、単位インパルス δ を入力したときの出力 $h := F[\delta]$ のことを、 F の単位インパルス応答と呼ぶ。

(2) (a) サンプル周期 T_s は $T_s = \frac{1}{f_s}$ で求まる。任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$x_n = X(nT_s) = X(n/f_s) = e^{in/f_s} = e^{in\omega} = (e^{i\omega})^n.$$

ただし $\omega := \frac{1}{f_s}$ とおいた。

(b) $y = F[x] = x * h$ であるから

$$y_n = x * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i(n-k)\omega} h(k) = e^{in\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\omega} h(k) = x_n \hat{h}(\omega).$$

ここで \hat{h} は h の離散時間フーリエ変換である。 ■

- デジタル・フィルターは授業1回半くらいの短い話に大事なことが詰まっている。今回は基本的な知識を尋ねてみた。
- (1) 単位インパルス δ 、単位インパルス応答は基礎事項である。覚えること自体は簡単のはず。
- (2) サンプリングは $x_n = X(nT_s)$ で x_n を定めること、というのも基本。正弦波をサンプリングすると等比数列になる、というのも基本 (次の周波数特性の話に繋がる)。
- (3) LTI フィルターの周波数特性というのも基本で、そこに単位インパルス応答の離散時間フーリエ変換が現れることが出題の理由。