

# 信号処理とフーリエ変換 第11回

～サンプリング定理, 離散時間 Fourier 変換, 畳み込み～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier2022/>

2022年12月14日

# 目次

- ① 本日の内容・連絡事項
- ② サンプリング定理
  - はじめに
  - サンプリング定理と証明
- ③ 離散時間 Fourier 変換
  - 離散時間 Fourier 変換の定義と反転公式
  - Fourier ファミリーの一覧表
- ④ 畳み込み
  - はじめに
  - 畳み込みの基本的な性質の証明
  - 畳み込みの例

# 本日の内容・連絡事項

- サンプルング定理、離散時間 Fourier 変換の手短な紹介をし、これまでに現れた“4つの Fourier 変換”を振り返る。Fourier 変換で重要な畳み込みの説明を始める。  
(講義ノート [1] の §5, §6, §7 に該当する。)
- レポート課題 2 について説明する。〆切りは 2021/1/13(金曜) 20:00. なるべく今年のうちに質問を済ませることを勧める。

## 5 サンプリング定理 5.1 はじめに

連続信号  $x(t)$  をサンプリング周期  $T_s$  でサンプリングして、離散信号  $\{x(nT_s)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  を取り出すことにより、元の信号の情報がどれくらい失われるのか、どのくらい保存されているのか、これは重要な問題である。

この問題は、Fourier 係数でも考えたが (離散 Fourier 変換の定理 8.3)、ここでは周期関数でない  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  の Fourier 変換に関する、有名なサンプリング定理 (定理 11.2) を紹介する。その結論を大まかに述べると、ある周波数以上の周波数成分の含まれていない信号は、2倍 (以上) のサンプリング周波数でサンプリングしたデータから再現できる、という内容である。

(少し違う表現をすると — 信号に含まれる最大周波数の2倍より高いサンプリング周波数でサンプリングすれば、元の信号を復元できる。)

個人的には、定理 11.2 は確かに正しい命題であるが、応用するにあたって、かなり不自然な内容である (現実との距離が大きすぎる) と考えている。

# 以前言いそびれたこと

離散 Fourier 変換のところで、周期的な信号の再現についての定理 (定理 8.3) を紹介した。最大周波数の 2 倍を超えるサンプリング周波数でサンプリングすれば、元の信号が復元可能である、という**十分性**を示す内容であったが、一方で**必要性**を示唆する次の事実も紹介しておくべきだった。

## 注意 11.1 (最大周波数のぴったり 2 倍では不足)

例えば周波数  $f$  の正弦波  $x(t) = A \sin(2\pi ft)$  に対して、サンプリング周波数  $f_s = 2f$  でサンプリングすると、サンプリング周期は  $T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{2f}$ 。

$$x(nT_s) = A \sin(2\pi f \cdot nT_s) = A \sin\left(2\pi f \cdot n \frac{1}{2f}\right) = A \sin(n\pi) = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

何とサンプリングしたデータ  $\{x(nT_s)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  は零数列である。当然復元は不可能である。 □

# 5 サンプリング定理

## 5.2 サンプリング定理と証明

### 定理 11.2 (サンプリング定理, Nyquist, Shannon, 染谷)

関数  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  の Fourier 変換

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

が

$$(\exists W > 0)(\forall \omega \in \mathbb{R} : |\omega| \geq W) \quad X(\omega) = 0$$

を満たすならば、このような  $W$  を任意に一つ取って

$$T := \frac{\pi}{W}$$

とおくとき、次式が成り立つ。

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc} [\pi(t/T - n)].$$

ただし  $\operatorname{sinc} x := \frac{\sin x}{x}$ .

## 5.2 サンプルング定理と証明

つまり、周波数  $\frac{W}{2\pi}$  以上の成分を含まない信号は、サンプルング周波数  $f_s := \frac{1}{T} = \frac{W}{\pi}$  ( $= 2 \times \frac{W}{2\pi}$ ) でサンプルングした離散信号から復元できる。

言い換えると、 $f$  以上の周波数成分を含まない信号は、サンプルング周波数  $2f$  でサンプルングしたデータから復元できる。

## 5.2 サンプリング定理と証明

証明 Fourier 変換の反転公式

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (t \in \mathbb{R})$$

に仮定「 $|\omega| \geq W \Rightarrow X(\omega) = 0$ 」を適用すると

$$(1) \quad x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-W}^W X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (t \in \mathbb{R}).$$

この式は周期  $2W$  の関数の Fourier 係数の式に似ている。

周期  $2W$  の関数  $X$  の Fourier 級数

$$c_n := \frac{1}{2W} \int_{-W}^W X(\omega) e^{-in\frac{2\pi}{2W}\omega} d\omega = \frac{1}{2W} \int_{-W}^W X(\omega) e^{-inT\omega} d\omega \quad (T = \frac{\pi}{W} \text{ を代入})$$

とおくとき

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{+in\frac{2\pi}{2W}\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{+inT\omega} \quad (\omega \in \mathbb{R}).$$

( $-$ を $+$ ,  $+$ を $-$ に置き換えた式が成立する。)



## 5.2 サンプリング定理 証明 (続き)

これから、

$$(2) \quad c_n := \frac{1}{2W} \int_{-W}^W X(\omega) e^{+inT\omega} d\omega$$

とおくとき

$$(3) \quad X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inT\omega} \quad (|\omega| \leq W).$$

が成り立つことが分かる。 $[-W, W]$ の外での $X$ の値を定義し直して、周期 $2W$ の関数としてから Fourier 級数展開した、とみなせる。

$$(1) \quad x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-W}^W X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{と (2) を見比べて、}$$

$$(4) \quad c_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2W} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega(nT)} d\omega = \frac{\sqrt{2\pi}}{2W} x(nT) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} x(nT).$$

( $c_n$  が分かれば良いと思ったら、分かった !!)

## 5.2 サンプリング定理 証明 (続き)

(3), (4) を (1) に代入して、 $\sum$  と  $\int$  の順序を交換すると

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-W}^W \left( \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-in\omega T} e^{i\omega t} d\omega \right) \\&= \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int_{-W}^W e^{i\omega(t-nT)} d\omega \\&= \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot 2W \operatorname{sinc}(W(t-nT)) \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc}(W(t-nT)) \quad (\because WT = \pi).\end{aligned}$$

ここ (=) で、 $\int_{-a}^a e^{ibx} dx = 2a \operatorname{sinc}(ab)$  ( $a > 0, b \neq 0$ ) を用いた。

$$W(t-nT) = \frac{\pi}{T}(t-nT) = \pi \left( \frac{t}{T} - n \right)$$

を用いて  $W$  を消去して

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc}(\pi(t/T - n)). \quad \square$$

Fourier ファミリーの最後のメンバー、離散時間 Fourier 変換を紹介する。実は、**Fourier 級数の理論**で本質的には済んでいる。

整数を添字に持つ複素数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  を **離散信号** (discrete signal, discrete-time signal) という (Cf. サンプルング定理)。これは  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  という写像とみなせる。 $f(n) = f_n$  ということ。離散信号全体の集合を  $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  と表す。

$f = \{f(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  に対して、

$$(5) \quad \mathcal{F}f(\omega) = \hat{f}(\omega) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega} \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

で定まる関数  $\mathcal{F}f$  を  $f$  の **離散時間 Fourier 変換** (discrete-time Fourier transform) と呼ぶ。

$\hat{f}$  は周期  $2\pi$  の関数である (確認しよう!)。ゆえに  $\omega \in [0, 2\pi]$  あるいは  $\omega \in [-\pi, \pi]$  で考えれば十分である。

反転公式は

$$(6) \quad f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\omega)e^{in\omega} d\omega \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

## 6.1 離散時間 Fourier 変換の定義と反転公式

**証明 1**  $f(n)$  は、周期  $2\pi$  の周期関数  $\hat{f}$  の、第  $(-n)$  番目の Fourier 係数と分かる。

— Cf. 普通の Fourier 級数 —

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ 周期 } 2\pi \text{ に対し、} c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \text{ とおくと } f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

**証明 2**  $\{e^{-in\omega}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  は直交系である。実際  $m \neq n$  のとき

$$(e^{-in\omega}, e^{-im\omega}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-m)\omega} d\omega = 0.$$

$m = n$  のとき

$$(e^{-in\omega}, e^{-in\omega}) = (e^{-in\omega}, e^{-in\omega}) = \int_{-\pi}^{\pi} d\omega = 2\pi.$$

ゆえに (5) は、直交系  $e^{-in\omega}$  による  $\hat{f}$  の展開であるから、その係数  $f(n)$  は

$$f(n) = \frac{(\hat{f}, e^{-in\omega})}{(e^{-in\omega}, e^{-in\omega})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\omega) e^{in\omega} d\omega. \quad \square$$

## 6.2 Fourier ファミリーの一覧表

これまでに出て来た、Fourier 変換、Fourier 級数 (Fourier 係数)、離散時間 Fourier 変換、離散 Fourier 変換の一覧表を作って整理してみよう。

対象	操作の名前	変換の定義式	反転公式
$\mathbb{R}$ 上の関数	Fourier 変換	$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R})$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi} d\xi$
$\mathbb{R}$ 上の周期関数	Fourier 係数	$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} dx \quad (n \in \mathbb{Z})$	$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$
$\mathbb{Z}$ 上の関数 (離散信号)	離散時間 Fourier 変換	$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega} \quad (\omega \in [0, 2\pi])$	$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}(\omega)e^{in\omega} d\omega$
$\mathbb{Z}$ 上の周期関数 (周期的離散信号)	離散 Fourier 変換	$C_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj} \quad (0 \leq n \leq N-1),$ $\omega := \exp \frac{2\pi i}{N}$	$f_j = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \omega^{nj}$

しばらく観賞。式が良く似ていることに注目 (“ $f$  は  $\sum$  の親戚”)。

その気になれば、もっと似せることも出来る。

- $c_n, C_n$  を  $\hat{f}(n)$  と書くとか (実際そうすることもある)。
- $\frac{1}{2\pi}$  を 2つの  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  に分けるとか。  $\frac{1}{N}$  を 2つの  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  に分けるとか。
- 離散 Fourier 変換で、 $\omega$  を  $e^{2\pi i/N}$  で書くとか。
- 名前のつけ方もやり直すとか。

## 6.2 Fourier ファミリーの一覧表

写像の性質も似たところがある。

- どれも変換である (逆写像が存在する)。
- (少し式を直すと) 内積を保つ (ユニタリ変換)。

## 7 畳み込み 7.1 はじめに

色々な関数 (連続信号, 離散信号)  $f, g$  に対して、**畳み込み**  $f * g$  が定義できる。

$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して、 $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  を次式で定める。

$$(7) \quad f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}).$$

周期  $2\pi$  の関数  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して、 $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  を次式で定める。

$$(8) \quad f * g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して、 $f * g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  を次式で定める。

$$(9) \quad f * g(n) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

周期  $N$  の関数  $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して、 $f * g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  を次式で定める。

$$(10) \quad f * g(n) := \sum_{k=0}^{N-1} f(n-k)g(k) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

**注意** 畳み込みを表す記号として  $*$  が定着している。一方、コンピュータープログラミング言語で、普通の積を表すためにも  $*$  が使われる。そのためか、畳み込みを表すのに普通の積の記号  $\cdot$  が使えるだろう、という勘違いした人が大量発生したことがある (おかしな解答が出回った?)。

## 7.1 はじめに

畳み込みは、ある種の積であると考えられ、素性の良い性質を持つ。

- (11)  $f * g = g * f,$  (交換法則)
- (12)  $(f * g) * h = f * (g * h),$  (結合法則)
- (13)  $(f_1 + f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g,$  (分配法則, 線形性 (i))
- (14)  $(cf) * g = c(f * g)$  (線形性 (ii))
- (15)  $[f \neq 0 \quad \wedge \quad f * g = f * h] \Rightarrow g = h$  (零因子の非存在)



## 7.1 はじめに

畳み込みと Fourier 解析との関係では、次が重要である。

- ① 畳み込みの Fourier 変換は、Fourier 変換の積に移る。

$$(16) \quad \mathcal{F}[f * g] = \text{定数} \times \mathcal{F}f \mathcal{F}g.$$

(定数が何になるかは、畳み込みや Fourier 変換の定義の流儀による。)

- ② 畳み込みには、単位元 (もどき) “デルタ”  $\delta$  がある。

$$(17) \quad f * \delta = f.$$

- 連続信号に対しては、 $\delta$  はディラックのデルタ超関数 (普通の関数の範囲をはみ出してしまうので少し扱いにくい)
  - 離散信号に対しては、 $\delta = \{\delta_{n0}\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{\dots, 0, 0, \underset{n=0}{1}, 0, 0, \dots\}$  (単位インパルス)
- ③ デルタ  $\delta$  の Fourier 変換は定数関数 1 である。また定数関数 1 の Fourier 変換は  $\delta$  である。

$$(18) \quad \mathcal{F}\delta = \text{定数} \times 1, \quad \mathcal{F}1 = \text{定数} \times \delta.$$

## 7.2 畳み込みの基本的な性質の証明

交換法則、結合法則など、前回紹介した畳み込みの基本的な性質を証明するのは、(零因子の非存在<sup>1</sup>以外は) 微積分の良い演習問題である。

結合法則の証明をしてみよう。積分の順序交換 (Fubini の定理) により

$$\begin{aligned}(g * f) * h(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (g * f)(x - y)h(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} g((x - y) - u) f(u) du \right) h(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} g((x - u) - y) h(y) dy \right) f(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g * h(x - u)f(u) du \\ &= (g * h) * f(x).\end{aligned}$$

すなわち  $(g * f) * h = (g * h) * f$ . ゆえに交換法則を用いて

$$(f * g) * h = (g * f) * h = (g * h) * f = f * (g * h).$$

---

<sup>1</sup>これはとても難しい。

## 7.3 畳み込みの例 電荷の作る静電場の電位

原点に置かれた単位点電荷の作る電場の電位 (ポテンシャル・エネルギー) は

$$U(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x}|}.$$

$U$  の勾配  $\times(-1)$  が電場になる:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{grad } U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}.$$

ここで  $\epsilon_0$  は真空の誘電率である。SI 単位系では

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \doteq 8.854 \times 10^{-12} \text{F/m} \quad (c \text{ は真空中の光速}) .$$

- 原点に電荷  $Q$  が置かれているならば  $u(\mathbf{x}) = QU(\mathbf{x})$
- 点  $\mathbf{y}$  に電荷  $Q$  が置かれているならば  $u(\mathbf{x}) = QU(\mathbf{x} - \mathbf{y})$
- 点  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N$  に電荷  $Q_1, \dots, Q_N$  が置かれているならば  $u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N Q_j U(\mathbf{x} - \mathbf{y}_j)$ .
- 空間に電荷が連続的に分布していて、密度が  $q(\mathbf{y})$  とするとき

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} U(\mathbf{x} - \mathbf{y})q(\mathbf{y})d\mathbf{y} = U * q(\mathbf{x}).$$

単位点電荷というもっとも簡単な場合の解から、畳み込みによって一般の解が表される。

- [1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート，  
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier/fourier-lecture-notes.pdf>，以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを変更した。(2014～).