応用複素関数レポート課題1

桂田 祐史

2024年6月11日, 2024年6月11日

3つの分野から1つずつ選んで解答する。

〆切は7月7日(日) 22:00. Oh-o! Meiji で提出する。

番号の後にAとある問題は比較的簡単、Bとある問題は少し手強い (難しい、あるいは作業量が多い)。BはAの1.5倍の得点とします。

授業で説明した内容だけで解けるはずですが、もちろん何を見ても、誰に質問しても構いません (ただし答えそのものを教わるのはやめてください)。Mathematica 等での検算は積極的に勧めます。ネットの情報が役に立つかもしれませんが、当たり外れが大きいので、書籍を調べることを勧めます。あるいはネットでアクセスするにしても、明治大学が契約している丸善 eBook (https://elib.maruzen.co.jp/) の詳細検索で、「関数論」,「複素関数」,「複素解析」などのキーワードで検索すると、色々な文献がヒットします。

1 留数定理の応用

1B 留数を用いて定積分を計算する方法の中で、複素対数関数を利用するものがある。例えば、$a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, 分母の次数が分子の次数より1以上大きな有理関数 f ($[a,b]$ では分母は0にならないとする) に対して

$$(\spadesuit)\qquad \int_a^b f(x)\,dx=-\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[a,b]}\operatorname{Res}\left(f(z)\operatorname{Log}\frac{z-a}{z-b};c\right).$$

ただし右辺に現れる Log は、対数関数の主値である ($z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ を $z=re^{i\theta}$ ($r>0,\theta\in(-\pi,\pi]$) と極形式で表示した場合に、$\operatorname{Log} z=\log r+i\theta$)。

(1) $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ で $z\mapsto \operatorname{Log}\dfrac{z-a}{z-b}$ は定義できて、正則関数であることを確かめよ。

(注意: Log は $\Omega:=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ で定義されているが、不連続な点が存在するので、Ω 全体で正則とはならない。)

(2) 公式 ($\spadesuit$) を用いて、$\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^3+1}$ の値を求めよ。

(ヒント: 公式 ($\spadesuit$) の導出は講義ノート ([1]) で説明してあるが、この問題の (2) 自体は公式を使うだけである。微積分で学んだ知識で原始関数を求められるが、留数計算だけでやってみよう、という問題である。)

2A 留数を用いて $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ の和を求めよ。

(ヒント: 例えば授業で計算した $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ の真似をする。)

2　正則関数の表現, Weierstrass の二重級数定理

3B

(1) $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ とするとき、留数を用いて

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n 2a}{a^2 - n^2}$$

の和を求めよ。

(2) (1) の結果を用いて、$\pi \operatorname{cosec}(\pi z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$ の部分分数展開を求めよ。

(3) (三角関数をコンプリートしよう) 授業と前問 (2) で $\pi \cot(\pi z)$, $\pi \operatorname{cosec}(\pi z)$ の部分分数展開が求められたが、$\pi \tan(\pi z)$, $\pi \sec(\pi z)$ についてはどうなるか？

ヒント　(1) は和の公式を適用すれば良い。仮定の条件チェックはさぼらずにやってください。(2) は (1) の結果をながめれば、どうすれば良いか見当がつくでしょう (5 月 7 日の授業が参考になるかも)。(3) は気がつけば簡単。あまり関数論と関係ないので出来なくても良いです。

3　無限遠点と Riemann 面, 1 次分数変換

4A　単位円版 $D_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ を D_1 の上に写す 1 次分数変換 φ は

$$\varphi(z) = \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \quad (\text{ただし } z, \varepsilon \in \mathbb{C},\ |z_0| < 1,\ |\varepsilon| = 1)$$

であることを示せ。

4B　単位円版 $D_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ を D_1 に双正則に写す写像 φ は

$$\varphi(z) = \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \quad (\text{ただし } z, \varepsilon \in \mathbb{C},\ |z_0| < 1,\ |\varepsilon| = 1)$$

であることを示せ。

ヒント　授業中に解説した。有名な問題なので、関数論の多くのテキストに載っている。親切な説明を見つけて、解読してレポートすればよい。

参考文献

[1] 桂田祐史：続 複素関数論,「複素関数」講義ノートの続き. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/zoku-complex-function.pdf (2015〜).