

# 正方形領域における重調和作用素の 固有値問題に対する差分方程式 (WWW 公開版)

† 桂田 祐史   ‡ 平野 裕輝

† 明大数学

‡ 愛知県立安城東高校

2012 年 9 月 21 日

# 小学生向けの図鑑の1頁から始まった学部卒研

「鉄板の上に白い砂をまいて、ゴムボール(スーパーボール)で鉄板をこすると、砂が動き出して不思議な図形が現れます。ゴムボールの大きさやこする場所を変えると模様が変化します。」

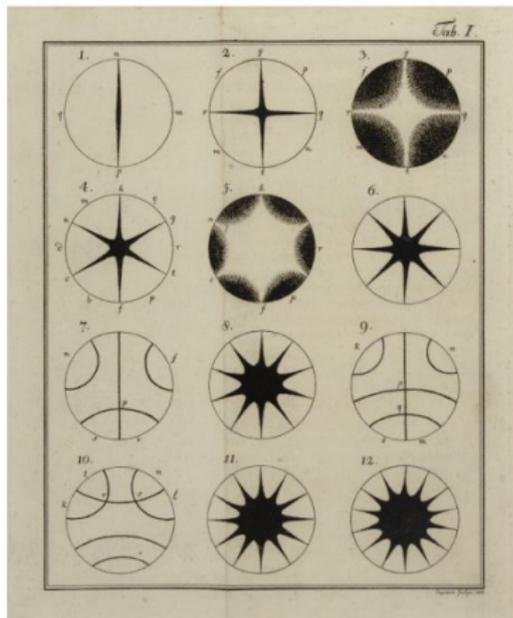
「砂は鉄板が振動しているところから、振動していないところに集まってきます。その結果、さまざまな図形が現れるのです。この不思議な現象は、200年ほど前に物理学者クラドニによって発見され、「クラドニ図形」とよばれています。鉄板の形によっても現れる模様はちがいます。」  
『ニューワイド ずかん百科 科学』学習研究社(2006)

( ▶ 平野君の言葉 )

他人の著作物をまるまるWWWに載せるわけに行かないので、削除してあります。「ずかん」には、美術作家金沢健一氏の作品(パフォーマンス?)の画像が載っています。それはネットで検索すればいくつも見ることが出来るかもしれません。

# Ernst Florens Friedrich Chladni (ドイツ, 1756–1827)

- Entdeckungen über die Theorie des Klanges (「音の理論についての発見」, 1787), Die Akustik (音響学, 1802), Neue Beyträge zur Akustik (音響理論に関する新しい寄稿, 1817) に多数の図版掲載
- 「音響学の父」、「振動理論の元祖」 (他に隕石宇宙由来説で有名)



- YouTube に実験の動画がたくさんある (上記の金沢健一氏のパフォーマンスも見られる)。
- Mary Désirée Waller (1886–1959) の著書 Chladni Figures — study in symmetry (1961) や論文に載った実験が、計算結果との照合に便利。

講演時の資料には、上記の著書に載っている、Waller 先生の実験の様子の写真を載せました。断りなく WWW に載せてよいのか分からないので削除しました。

[http://www.cymascope.com/cyma\\_research/history/mary.jpg](http://www.cymascope.com/cyma_research/history/mary.jpg)にあります。

- 大人の科学マガジン with KIDS, 音の万華鏡 (2011 年 6 月 29 日発売)
- おどるすなもよう, 名古屋市科学館 (2012 年 9 月現在展示されてる?)

# 目標: 正方形板の Chladni 図形をコンピュータ上に再現する

重調和作用素

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

の固有値問題を解くことになる。

# 目標: 正方形板の Chladni 図形をコンピュータ上に再現する

重調和作用素

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

の固有値問題を解くことになる。

- 正方形領域であっても、固有値, 固有関数は exact に求まらない。

# 目標: 正方形板の Chladni 図形をコンピューター上に再現する

## 重調和作用素

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

の固有値問題を解くことになる。

- 正方形領域であっても、固有値, 固有関数は exact に求まらない。
- 差分法で計算するのは、(正方形領域であるから) 難しくないであろう。

その計算結果を

*Mary D. Waller, Vibrations of free square plates: part I. normal vibrating modes, Physical Society, Vol. 51 (1939), pp. 831–844.*

の実験結果と比較しよう。

# 目標: 正方形板の Chladni 図形をコンピュータ上に再現する

重調和作用素

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

の固有値問題を解くことになる。

- 正方形領域であっても、固有値, 固有関数は exact に求まらない。
- 差分法で計算するのは、(正方形領域であるから) 難しくないであろう。

その計算結果を

*Mary D. Waller, Vibrations of free square plates: part I. normal vibrating modes, Physical Society, Vol. 51 (1939), pp. 831–844.*

の実験結果と比較しよう。

→ **実は簡単ではないことが分かった。**

(有限要素法 ( **FEM** ) を使えば良かった…)

# Target problem — free edge を持つ薄い平板の固有振動

2次元領域  $\Omega$  における、“free edge” の境界条件のもとでの重調和作用素

$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$  の固有値問題 ( [▶ 方程式導出の歴史](#) )

$$\Delta^2 u = \lambda u \quad (\text{in } \Omega), \quad (1)$$

$$\mu\Delta u + (1 - \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = 0 \quad (\text{on } \partial\Omega), \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \Delta u + (1 - \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right) = 0 \quad (\text{on } \partial\Omega), \quad (3)$$

$$\text{領域の角点で } \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n} \text{ の片側極限が等しい} \quad (4)$$

- $\mu$  は与えられた定数。材質の Poisson 比と呼ばれる無次元数。
- $n$  は外向き単位法線ベクトル、 $\tau$  は単位接線ベクトル
- 正方形の場合、(4) は  $u_{xy} = 0$  (4 頂点において) と同値
- (2), (3), (4) は実は自然境界条件 (だから FEM では簡単)
- 1次元 (境界条件が  $\partial^2 u / \partial n^2 = \partial^3 u / \partial n^3 = 0$ ) とは大違い

# 差分近似 (1)

- $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$
- $N \in \mathbb{N}$ ,  $h := \frac{1}{N}$ ,  $x_i := ih$ ,  $y_j := jh$ ,  $u_{ij} := u(x_i, y_j)$
- $u_{ij}$  の近似  $U_{ij}$  を求める ( $0 \leq i \leq N$ ,  $0 \leq j \leq N$ )
- 方程式に現れる導関数は、すべて中心差分近似

$$f'(x) \sim \frac{1}{2h}(f(x+h) - f(x-h)),$$

$$f''(x) \sim \frac{1}{h^2}(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)),$$

$$f^{(3)}(x) \sim \frac{1}{h^3}(f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)),$$

$$f^{(4)}(x) \sim \frac{1}{h^4}(f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h))$$

(あるいはそれらを組み合わせた式) を用いて差分近似する。

## 差分近似 (2)

例えば  $u_{xxyy}$  については、

$$\begin{aligned} & u_{xxyy}(x, y) \\ & \sim \frac{1}{h^4} \{ u(x+h, y+h) + u(x+h, y-h) + u(x-h, y+h) + u(x-h, y-h) \\ & \quad - 2[u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h)] + 4u(x, y) \}. \end{aligned}$$

肝心の  $\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$  は「13点差分」になる。

→  $\Delta^2 u = \lambda u$  から

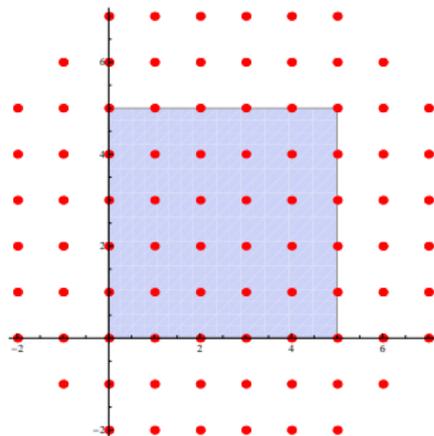
$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^4} \left[ 20U_{ij} - 4(U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}) \right. \\ & \quad \left. + 2(U_{i+1,j+1} + U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j-1}) + (U_{i+2,j} + U_{i-2,j} + U_{i,j+2} + U_{i,j-2}) \right] \\ & = \lambda U_{ij} \end{aligned}$$

が得られる。

# 仮想格子点の導入

境界条件の方程式を中心差分近似するため、仮想格子点を導入。  
 $(x_i, y_j)$  の  $i$  と  $j$  の範囲は、

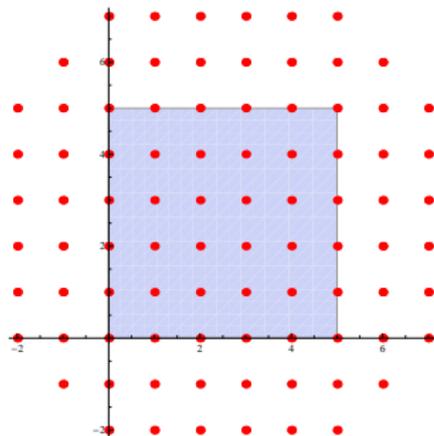
$$(i, j) \in \{-2, -1, N+1, N+2\} \times \{0, 1, \dots, N\} \cup \{0, 1, \dots, N\} \times \{-2, -1, N+1, N+2\} \\ \cup \{(-1, -1), (N+1, -1), (N+1, N+1), (-1, N+1)\}.$$



# 仮想格子点の導入

境界条件の方程式を中心差分近似するため、仮想格子点を導入。  
 $(x_i, y_j)$  の  $i$  と  $j$  の範囲は、

$$(i, j) \in \{-2, -1, N+1, N+2\} \times \{0, 1, \dots, N\} \cup \{0, 1, \dots, N\} \times \{-2, -1, N+1, N+2\} \\ \cup \{(-1, -1), (N+1, -1), (N+1, N+1), (-1, N+1)\}.$$



……このやり方の正当性にあまり自信があるわけではない。

# 行列の固有値問題への帰着

- ① 境界条件から導かれた差分方程式を用いて、  
仮想格子点での値 ( $i < 0, i > N, j < 0, j > N$  に対する  $U_{ij}$ ) を消去  
→  $\{U_{ij}\}_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 0 \leq j \leq N}}$  についての方程式系が得られる。
- ②  $\{U_{ij}\}_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 0 \leq j \leq N}}$  を 1 次元的に並べた  $(N+1)^2$  次元ベクトルを  $\mathbf{U}$  とする:

$$\mathbf{U} := (U_\ell), \quad U_\ell = U_{ij} \quad (i \text{ と } j \text{ は } \ell \text{ を } N+1 \text{ で割った余りと商})$$

$$\implies \exists P \in M(N+1; \mathbb{R}) \quad \text{s.t.} \quad P\mathbf{U} = \lambda\mathbf{U}.$$

# 行列の固有値問題への帰着

- ① 境界条件から導かれた差分方程式を用いて、  
仮想格子点での値 ( $i < 0, i > N, j < 0, j > N$  に対する  $U_{ij}$ ) を消去  
→  $\{U_{ij}\}_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 0 \leq j \leq N}}$  についての方程式系が得られる。
- ②  $\{U_{ij}\}_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 0 \leq j \leq N}}$  を 1 次元的に並べた  $(N+1)^2$  次元ベクトルを  $\mathbf{U}$  とする:

$$\mathbf{U} := (U_\ell), \quad U_\ell = U_{ij} \quad (i \text{ と } j \text{ は } \ell \text{ を } N+1 \text{ で割った余りと商})$$

$$\implies \exists P \in M(N+1; \mathbb{R}) \quad \text{s.t.} \quad P\mathbf{U} = \lambda\mathbf{U}.$$

残念ながら、この  $P$  は対称行列でない。

Cf. clamped edge (DBC) の場合、すんなり対称行列の問題が得られる。

( [▶ clamped edge の行列](#) )

# 対称行列の固有値問題 $\mathcal{P}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ への帰着

- $P$  は非対称で、数値計算で効率よく固有値を求めるのが困難である。

# 対称行列の固有値問題 $\mathcal{P}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ への帰着

- $P$  は非対称で、数値計算で効率よく固有値を求めるのが困難である。
- $\mathbf{u} := Q\mathbf{U}$  と変換する。ここで

$$V := \text{diag} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \dots, 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad Q := V \otimes V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}V & & & & \\ & V & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & V & \\ & & & & \frac{1}{\sqrt{2}}V \end{pmatrix}.$$

$\implies P\mathbf{U} = \lambda\mathbf{U}$  は  $\mathcal{P}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$  に変換される ( $P = QPQ^{-1}$  は対称!)  
( $P$  の具体形は予稿集に記した。)



# 数値実験の手順

# 数値実験の手順

- MATLAB を採用

# 数値実験の手順

- MATLAB を採用
- $\mathcal{P}$  を計算する関数 `plate_f1(N,mu)` を作成 (80 行弱, 公開)

# 数値実験の手順

- MATLAB を採用
- $\mathcal{P}$  を計算する関数 `plate_f1(N,mu)` を作成 (80 行弱, 公開)
- 標準の関数 `eigs()` (中は **ARPACK** ?) で固有値・固有関数を計算

# 数値実験の手順

- MATLAB を採用
  - $\mathcal{P}$  を計算する関数 `plate_f1(N,mu)` を作成 (80 行弱, 公開)
  - 標準の関数 `eigs()` (中は **ARPACK** ?) で固有値・固有関数を計算
  - 主記憶 16GB のマシン (PowerMac) で、
    - $N = 10, 20, 40, \dots, 1280$  (2560 は 32GB にしても計算出来なかった)
    - $\mu = 0.3$  (とりあえず)
- の場合に、固有値  $\lambda_n = \lambda_{N,\mu,n}$ , 固有関数  $\varphi_n = \varphi_{N,\mu,n}$  を 200 個計算

$$0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 \leq \lambda_5 \leq \dots$$

# 数値実験の手順

- MATLAB を採用
- $\mathcal{P}$  を計算する関数 `plate_f1(N,mu)` を作成 (80 行弱, 公開)
- 標準の関数 `eigs()` (中は **ARPACK** ?) で固有値・固有関数を計算
- 主記憶 16GB のマシン (PowerMac) で、
  - $N = 10, 20, 40, \dots, 1280$  (2560 は 32GB にしても計算出来なかった)
  - $\mu = 0.3$  (とりあえず)

の場合に、固有値  $\lambda_n = \lambda_{N,\mu,n}$ , 固有関数  $\varphi_n = \varphi_{N,\mu,n}$  を 200 個計算

$$0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 \leq \lambda_5 \leq \dots$$

- 固有関数  $\varphi$  のグラフ、等高線、節線 ( $\varphi$  の零点集合) を描画

# 数値実験の手順

- MATLAB を採用
  - $\mathcal{P}$  を計算する関数 `plate_f1(N,mu)` を作成 (80 行弱, 公開)
  - 標準の関数 `eigs()` (中は **ARPACK** ?) で固有値・固有関数を計算
  - 主記憶 16GB のマシン (PowerMac) で、
    - $N = 10, 20, 40, \dots, 1280$  (2560 は 32GB にしても計算出来なかった)
    - $\mu = 0.3$  (とりあえず)
- の場合に、固有値  $\lambda_n = \lambda_{N,\mu,n}$ , 固有関数  $\varphi_n = \varphi_{N,\mu,n}$  を 200 個計算

$$0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 \leq \lambda_5 \leq \dots$$

- 固有関数  $\varphi$  のグラフ、等高線、節線 ( $\varphi$  の零点集合) を描画
- 重複固有値  $\lambda_j = \lambda_{j+1}$  ( $j \geq 4$  について、計算した範囲で重複度は高々 2 ?) に対して、

$$\varphi = a\varphi_j + b\varphi_{j+1}$$

を ( $a, b$  を変えて) 描画

# 数値実験の手順

- MATLAB を採用
  - $\mathcal{P}$  を計算する関数 `plate_f1(N,mu)` を作成 (80 行弱, 公開)
  - 標準の関数 `eigs()` (中は **ARPACK** ?) で固有値・固有関数を計算
  - 主記憶 16GB のマシン (PowerMac) で、
    - $N = 10, 20, 40, \dots, 1280$  (2560 は 32GB にしても計算出来なかった)
    - $\mu = 0.3$  (とりあえず)
- の場合に、固有値  $\lambda_n = \lambda_{N,\mu,n}$ , 固有関数  $\varphi_n = \varphi_{N,\mu,n}$  を 200 個計算

$$0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 \leq \lambda_5 \leq \dots$$

- 固有関数  $\varphi$  のグラフ、等高線、節線 ( $\varphi$  の零点集合) を描画
- 重複固有値  $\lambda_j = \lambda_{j+1}$  ( $j \geq 4$  について、計算した範囲で重複度は高々 2 ?) に対して、

$$\varphi = a\varphi_j + b\varphi_{j+1}$$

を ( $a, b$  を変えて) 描画

- 固有値、固有関数の節線を他の文献のデータと比較

# 固有値の計算結果について

- 固有値  $\lambda_{j,N,\mu}$  の誤差  $\sim |\lambda_{j,N,\mu} - \lambda_{j,2N,\mu}|$  と推定して、 $j \geq 4$  に対して、誤差 =  $O(1/N^2)$  であることを確認出来た。
- $N = 640$  で  $4 \leq j \leq 40$  に対して相対誤差  $10^{-4.7} \sim 10^{-3.8}$  程度 (clamped edge の場合の数値計算とほぼ同じ)

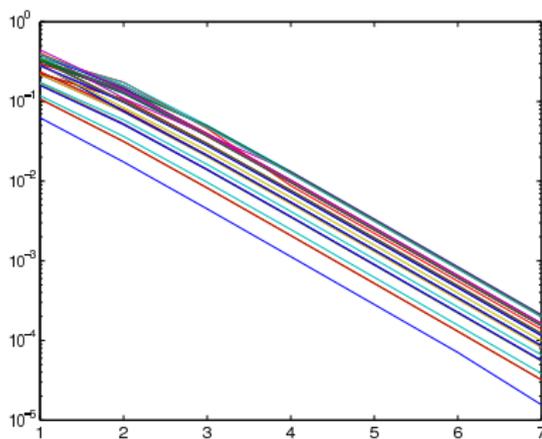


Figure: clamped edge (DBC)

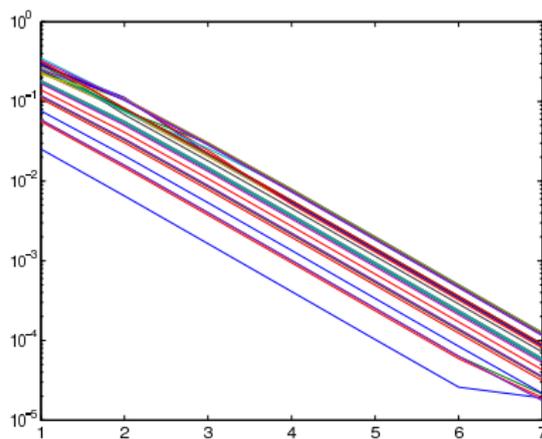


Figure: free edge

横軸が  $N = 10 \cdot 2^{n-1}$  としたときの  $n$ , 縦軸は誤差の推定値の常用対数

# M. Waller の実験 ([1], 1939) による Chladni figures

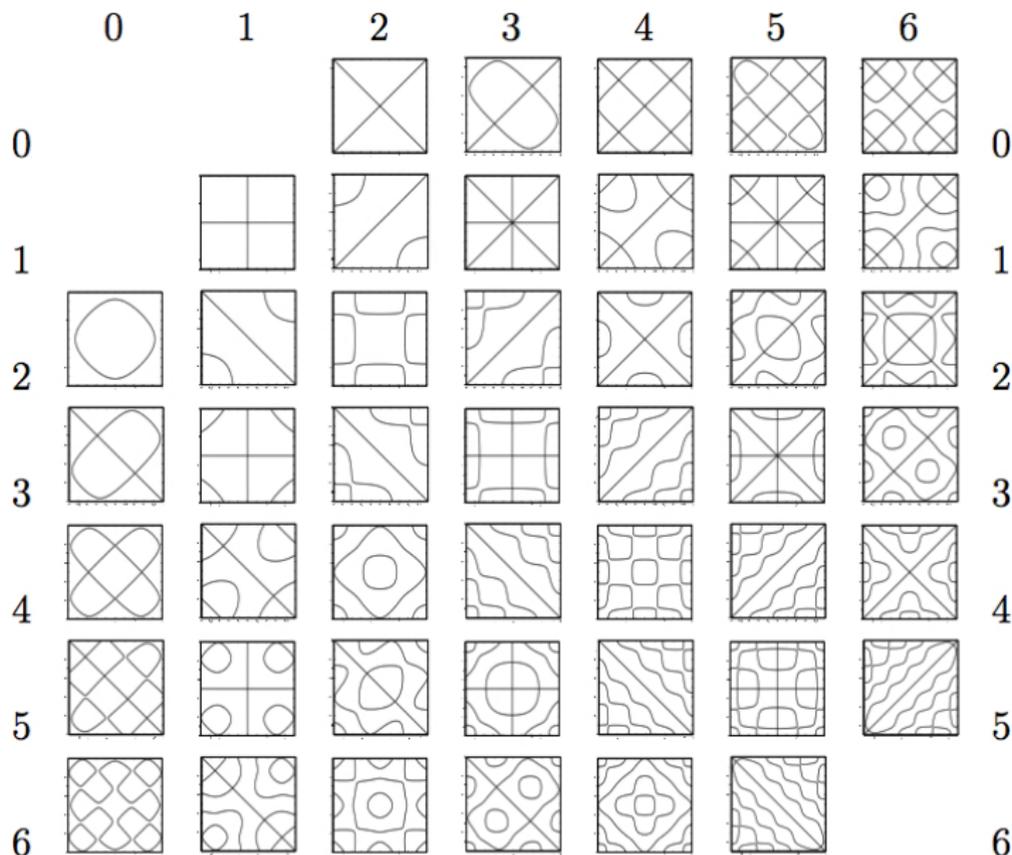
講演時は

*Mary D. Waller, Vibrations of free square plates: part I. normal vibrating modes, Physical Society, Vol. 51 (1939), pp. 831–844.*

に掲載されていた実験結果を載せましたが、残念ながらカットします。Waller 先生がお亡くなりになって没後 50 年以上経ったので、日本の著作権上は載せても構わないと考えられますが、Waller 先生の母国では没後 70 年は保護期間中なので、ちょっと微妙なところです。現実に論文の PDF は購入する必要がありましたし。

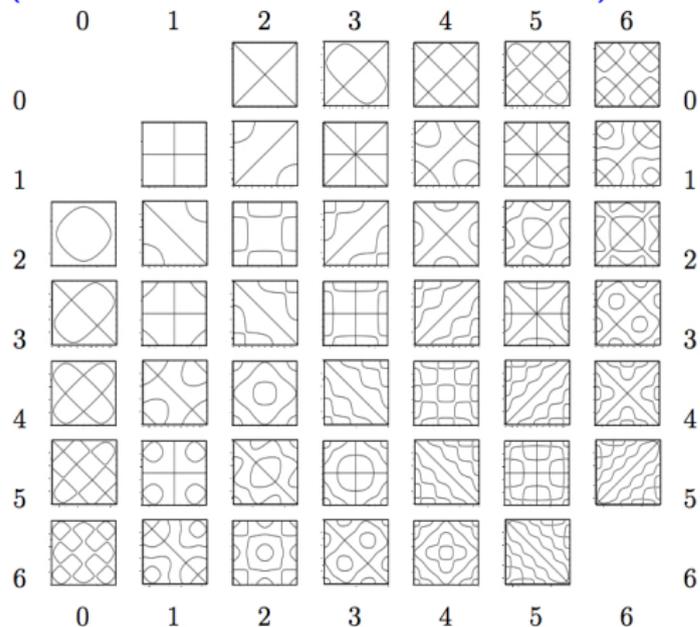
余段ですが、最初届いた PDF ファイルには、肝心の実験結果の写真がなく、白いページがあるだけでした。面倒だけれどメールを出して、電子化やり直してもらいました。

# 差分法による数値計算 (平野修論 [7], 2012) で得た節線



# Waller 実験 vs. 平野差分法

(すみません Waller 先生の図は…)



- 低いモードについては良く合っている。
- 高いモードについては不一致も見られる。
  - そもそも実験結果のパターンに対称性がないこともある (▶ 現代の実験)。
  - $\Delta^2$  で記述する Kirchhoff 平板モデルは、高次のモードでは十分な近似でない、とする意見もある。

## 出来たこと

- 正方形領域における、free edge の境界条件のもとでの  $\Delta^2$  の固有値問題 (1), (2), (3), (4) を差分近似して、対称行列の固有値問題  $\mathcal{P}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$  を導出した。
- 差分方程式の正当性は保証されていないが、実験結果 (M. Waller による Chladni パターン) と数値計算結果を比較してある程度の一致が得られた。

## やり残したこと

- 固有値、固有関数の Poisson 比依存性を調べること
- 古典的な Ritz の方法による計算、有限要素法 (有限要素法) による計算との比較
- その他…

## 出来たこと

- 正方形領域における、free edge の境界条件のもとでの  $\Delta^2$  の固有値問題 (1), (2), (3), (4) を差分近似して、対称行列の固有値問題  $\mathcal{P}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$  を導出した。
- 差分方程式の正当性は保証されていないが、実験結果 (M. Waller による Chladni パターン) と数値計算結果を比較してある程度の一致が得られた。

## やり残したこと

- 固有値、固有関数の Poisson 比依存性を調べること
- 古典的な Ritz の方法による計算、有限要素法 (有限要素法) による計算との比較
- その他…

以上です。ご清聴ありがとうございました。

参考：“clamped edge”  $u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$  on  $\partial\Omega$  (DBC) の場合

$$\Delta^2 u \equiv u_{xxxx} + 2u_{xyxy} + u_{yyyy} = \lambda u \text{ に対する差分方程式} \iff M\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}.$$

ただし

$$\mathbf{u} := (U_{11}, U_{21}, \dots, U_{N_x-1,1}, U_{12}, \dots, U_{N_x-1,2}, \dots, U_{1,N_y-1}, \dots, U_{N_x-1,N_y-1})^T,$$

$$M := \frac{1}{h_x^4} (I_{N_y-1} \otimes A_{N_x-1}) + \frac{2}{h_x^2 h_y^2} (B_{N_y-1} \otimes B_{N_x-1}) + \frac{1}{h_y^4} (A_{N_y-1} \otimes I_{N_x-1}),$$

$$A_m := \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}, \quad B_m := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\frac{1}{h_x^4} A_{N_x-1}$  と  $\frac{1}{h_x^2} B_{N_x-1}$  は、それぞれ 1 変数の微分作用素  $\frac{d^4}{dx^4}$  と  $-\frac{d^2}{dx^2}$  (ともに Dirichlet 境界条件) に対する差分近似の行列。

上の行列は、Bauer-Reiss ([3], 1972) の行列と完全に一致する (彼らは差分方程式を明記していないが、仮想格子点近似をしていると考えられる)。

# $Q = V \otimes V$ について

$V$  は 1 次元 Laplacian の固有値問題

$$-u''(x) = \lambda u(x), \quad u'(0) = u'(1) = 0$$

の差分近似で見出した変換 ([▶ スキップ](#))。

# $Q = V \otimes V$ について

$V$  は 1次元 Laplacian の固有値問題

$$-u''(x) = \lambda u(x), \quad u'(0) = u'(1) = 0$$

の差分近似で見出した変換 ([▶ スキップ](#))。

$[0, 1]$  を  $N$  等分し、仮想格子点を導入して差分方程式を立てると、

# $Q = V \otimes V$ について

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -2 & 2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{pmatrix}.$$

# $Q = V \otimes V$ について

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{pmatrix}.$$

赤いところが嫌。それぞれの行に  $\frac{1}{2}$  をかければ対称になる？

# $Q = V \otimes V$ について

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ \frac{1}{2} U_N \end{pmatrix}.$$

左辺の行列は対称になったが、これは固有値問題とは言えない。

# $Q = V \otimes V$ について

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{pmatrix}$$

一般化固有値問題  $A_5 \mathbf{U} = \lambda B \mathbf{U}$  に帰着した。

# $Q = V \otimes V$ について

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{pmatrix}$$

一般化固有値問題  $A_S \mathbf{U} = \lambda B \mathbf{U}$  に帰着した。

$B$  は正値対称なので、Cholesky 分解  $B = V^T V$  が可能。

$C := (V^{-1})^T A_S V^{-1}$ ,  $\mathbf{u} := V \mathbf{U}$  とおくと、  
標準固有値問題  $C \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$  に変換できる。

$A_S$  が対称なので、 $C$  も対称である。



# $Q = V \otimes V$ について (ラスト)

## 2次元 Laplacian の固有値問題

$$-\Delta u(x, y) = \lambda u(x, y) \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

を差分法で離散化すると、

$$A\mathbf{U} = \lambda\mathbf{U}, \quad A = I_{N_y+1} \otimes A_{N_x+1} + A_{N_y+1} \otimes I_{N_x+1}$$

となる ( $A_{N_y+1}$ ,  $A_{N_x+1}$  は 1次元 Laplacian のときの行列)。

$$V := V_{N_y+1} \otimes V_{N_x+1}, \quad \mathbf{u} := V\mathbf{U}, \quad B := V^T V, \quad A_s := BA,$$

$$C := (V^{-1})^T A_s V^{-1}$$

とおくと、 $C$  は対称で、

$$C\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}.$$

→ 1次元の場合の「積」になっただけで、自然なことと考えられる。

## $Q = V \otimes V$ について (ラスト)

2次元 Laplacian の固有値問題

$$-\Delta u(x, y) = \lambda u(x, y) \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

を差分法で離散化すると、

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \lambda\mathbf{U}, \quad \mathbf{A} = I_{N_y+1} \otimes A_{N_x+1} + A_{N_y+1} \otimes I_{N_x+1}$$

となる ( $A_{N_y+1}, A_{N_x+1}$  は 1次元 Laplacian のときの行列)。

$$\mathbf{V} := V_{N_y+1} \otimes V_{N_x+1}, \quad \mathbf{u} := \mathbf{V}\mathbf{U}, \quad \mathbf{B} := \mathbf{V}^T \mathbf{V}, \quad \mathbf{A}_s := \mathbf{B}\mathbf{A},$$

$$\mathbf{C} := (\mathbf{V}^{-1})^T \mathbf{A}_s \mathbf{V}^{-1}$$

とおくと、 $\mathbf{C}$  は対称で、

$$\mathbf{C}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}.$$

→ 1次元の場合の「積」になっただけで、自然なことと考えられる。

同じ変換してみたら  $\Delta^2$  の場合も対称行列の問題に帰着した(不思議?)。

# free edge の固有値

0.00136493786720303

0.00252915509675212

0.00325771214904122

181.394289273769

384.00873343824

589.042439382489

1211.09781053698

1211.0979985646

3732.34385780795

3732.34425777863

4055.89733916399

4797.6431632806

5955.41240741932

11121.7657399604

11121.7658493532

13714.1723478587

14000.200000000000

# 余談: 有限要素法 (1) 変分法的定式化

$K = 1$  という条件下での  $J$  の停留問題

$$J[u] := \iint_{\Omega} [(\Delta u)^2 - 2(1 - \mu)(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2)] dx dy, \quad K[u] := \iint_{\Omega} u^2 dx dy.$$

弱形式は

$$J[u, v] := \iint_{\Omega} [\Delta u \Delta v - (1 - \mu)(u_{xx}v_{yy} + u_{yy}v_{xx} - 2u_{xy}v_{xy})] dx dy,$$

$$K[u, v] := \iint_{\Omega} uv dx dy$$

として、

$$J[u, v] = \lambda K[u, v] \quad (\forall v).$$

(いわゆる自然境界条件である。)

# 余談: 有限要素法 (2) FreeFem++ プログラム

```
// BiharmonicEigenvalues4.edp
// 参考: http://ljl1.math.upmc.fr/pipermail/freefempp/2012-March/001737.html

load "Morley"
verbosity=1;
int i;

real sigma=0.3;
mesh Th=square(20,20,[x-0.5,y-0.5]);
fespace Vh(Th, P2Morley);
Vh [u,ux,uy], [v,vx,vy];

macro lap2(u,v) (dxx(u)+dyy(u))*(dxx(v)+dyy(v)) // EOM
varf J([u,ux,uy], [v,vx,vy]) = int2d(Th)(lap2(u,v)
  -(1-sigma)*(dxx(u)*dyy(v)+dyy(u)*dxx(v)-2.0*dxy(u)*dxy(v)));

varf K([u,ux,uy], [v,vx,vy]) = int2d(Th)(u*v);

matrix A=J(Vh,Vh,solver=UMFPACK);
matrix B=K(Vh,Vh,solver=UMFPACK);

int nev=40;
real[int] ev(nev); // Stockage des valeurs propres
Vh[int] [eVu,eVux,eVuy](nev); // Stockage des vecteurs propres

int k=EigenValue(A,B,sym=true,value=ev,vector=eVu,tol=1e-10,maxit=0,ncv=0);
for (i=0;i<nev;i++) {
  cout << ev[i] << endl;
  // plot(eVu[i],[eVux[i],eVuy[i]],nbiso=64,fill=true,wait=true);
  plot(eVu[i],nbiso=64,fill=true,wait=true);
}
```

# 薄い板の曲げ・振動理論の方程式導出の歴史

SIAM Review に出るらしい Gander and Wanner [4] が便利。

- Sophie Germain (1776–1831) は板の振動の問題に取り組み (1811, 1813, 1815)、不完全な議論ながら次の微分方程式を導いた。

$$N^2 \left( \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0.$$

- Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887) “Kirchhoff 平板の理論” (1850) Euler-Bernoulli の 1次元梁の理論を 2次元に拡張。  
「平面保持の仮定」 — 薄い板では良い近似になっている。  
正しい境界条件の方程式を導出、円盤の場合に問題を解いた。
- Lord Rayleigh, *The Theory of Sound* (1877).
- Horace Lamb (1849–1934) 角点での境界条件の方程式を導出 (1889)
- Walter Ritz (1878–1909) の Rayleigh-Ritz の方法を確立した

*Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern (1909)*

は板の振動を扱っている。

# 現代の実験室での Chladni 図形 (Gander-Wanner [4])

この図もカットします。

*Martin J. Gander and Gerhard Wanner, From Euler, Ritz and Galerkin to Modern Computing, 2011. (to appear in SIAM Review とある)*

は今のところネットで検索するとすぐに入手できます。その Fig. 5.2 を引用しましたが、Gander-Wanner がどこから引用したのか定かではないんですね…

クラドニ図形を実際に見た時、非常に驚いた。まるで砂が生きているかのように動く。そこで、私はクラドニ図形というものに興味を持ち、クラドニ図形がどのような時に、どのようなパターンが出るのかを理解したいと思った。

-  Mary D. Waller, Vibrations of free square plates: part I. normal vibrating modes, Physical Society, Vol. 51 (1939), pp. 831–844.
-  Mary D. Waller, Chladni figures — a study in symmetry, G. Bell (1961).
-  Louis Bauer and Edward L. Reiss, Block Five Diagonal Matrices and the Fast Numerical Solution of the Biharmonic Equation, Mathematics of computation, Vol. 26, 118, pp. 311–326 (1972).
-  Martin J. Gander and Gerhard Wanner, From Euler, Ritz and Galerkin to Modern Computing, 2011. (to appear in SIAM Review とあるが…)
-  von Walter Ritz, Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern, Annalen der Physik Volume 333, Issue 4, pp. 737–786 (1909).
-  Horace Lamb, On the flexure of an elastic plate, Proc. London Math. Soc., 21, 70–91, 1889.
-  平野裕輝, 正方形領域における重調和作用素の固有値問題 — 差分法によるクラドニ図形の解析 —, 明治大学大学院理工学研究科基礎理工

<http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/chladni/> から、plate\_f1.m と plot\_n.m をダウンロードする。

$N = 640$ , 200 個計算し、第 4 固有関数を描画する

```
>> N=640
>> a=plate_f1(N, 0.3);
>> [v,d]=eigs(a, 200, 0);
>> plot_n(v(:,201-4),N,N)
```

- 予稿の 2 ページめ真ん中あたり (符号の書き間違い)

$$u_{xyxy}(x, y) \sim \frac{1}{h^4} [u(x+h, y+h) + u(x-h, y+h) + u(x+h, y-h) + u(x-h, y-h) - 2u(x+h, y) - 2u(x-h, y) - 2u(x, y+h) - 2u(x, y-h) + 4u(x, y)].$$

- 予稿の 2 ページめ下 (見出しの修正し忘れ)

## 2.2 対称行列の**一般化**固有値問題への変換



## 2.2 対称行列の**固有値**問題への変換

- 予稿を書いてから、ネットで以下の文書を見つけた。
  - ① Martin J. Gander and Gerhard Wanner, From Euler, Ritz and Galerkin to modern computing, 2011. (SIAM Review に出る, そうです)
  - ② Martin J. Gander and Felix Kwok, Chladni figures and the Tacoma bridge: Motivating PDE eigenvalue problems via vibrating plates. (SIAM Review に… (同上), Ritz の方法による Maple プログラムと有限体積法による MATLAB プログラムが載っている)