

応用数値解析特論 第 12 回

～Navier-Stokes 方程式に対する有限要素法 (3)～
非定常 Navier-Stokes 方程式

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana2022/>

2022 年 12 月 19 日

目次

- ① 本日の講義内容、連絡事項
- ② Navier-Stokes 方程式に対する有限要素解析
 - 非定常 Navier-Stokes 方程式
 - はじめに
 - 例題
 - 弱形式の準備
 - Lagrange-Galerkin 法とそれによる弱形式
 - FreeFem++ の `convect()`
 - 流線を描くテクニック
- ③ 流体力学の常識: Poiseuille 流
- ④ 参考文献

本日の講義内容、連絡事項

流体力学の方程式の最後として、非定常 Navier-Stokes 方程式を取り上げる。有名な一様流の中に置かれた円柱の周りの流れを取り上げる。

Newton 法のような反復解法は必要ないが、安定性の確保が大きな問題となる。それへの対処策は現在も研究中である。

レポート課題 B の提出先を Oh-o! Meiji に用意しました。〆切は 2023 年 1 月 18 日 18:00 です。(Covid-19 の流行状況にもよるが) 提出したレポートの内容について最後の授業 (2023/1/22 2 限) に口頭試問を行う。

非定常 Navier-Stokes 方程式の有名な問題を 1 つ解いてみよう。

日本応用数学会のチュートリアル (2016) で公開された資料である、鈴木 [1] の “Time-dependent Navier-Stokes equations around a cylinder” とそのサンプル・プログラムを読んでみる。

<https://www.ljll.math.upmc.fr/~suzukia/FreeFempp-tutorial-JSIAM2016/>

このサイトに置いてある `example9 NS-cylinder.edp` を入手しよう。

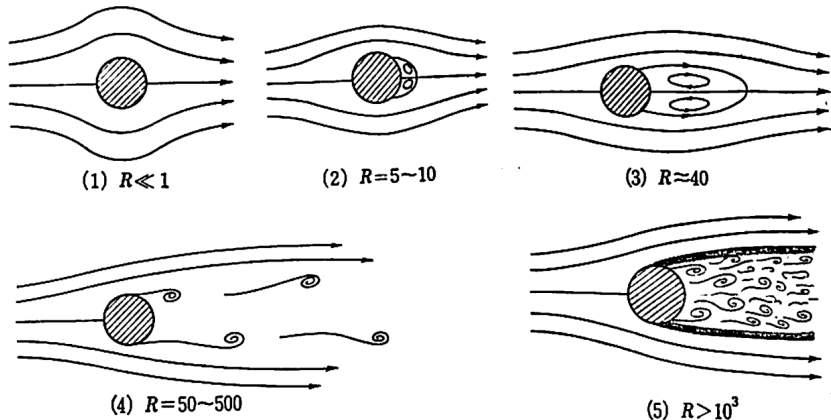
```
curl -O https://www.ljll.math.upmc.fr/~suzukia/FreeFempp-tutorial-JSIAM2016/EDP/NS-cylinder.edp
```

有名な円柱をよぎる一様流の問題である。Reynolds 数を変えることで、流れがどのように変わるか、多くのテキストで説明されている。

“fluid cylinder” などのキーワードで、動画を検索してみることを勧める。

常識的知識: 円柱のまわりの一様流

基本的な文献である今井 [2] での「円柱のまわりの一様流」の説明の図 1-1 (p. 3)



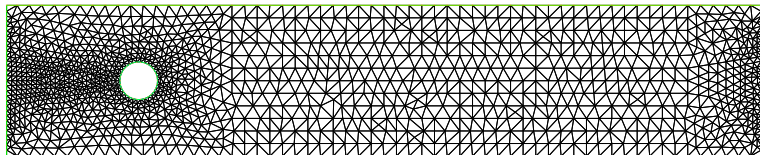
1-1 図

図 1: 今井 [2] Reynolds 数 R の増加とともに層流, 双子渦, Karman 渦列, 乱流、と遷移する R が小さいうちは対称性を持つ定常流。大きくなると非定常流, 交互に逆向きの渦が発生して流れる

11.5.2 例題

問題を考える領域 Ω は、長方形領域から閉円盤を除いたものである。

$$\Omega = ((-1, 9) \times (-1, 1)) \setminus \{(x, y) \mid (x - 3/4)^2 + y^2 \leq 1/16\}.$$



Ω の境界を、以下の5つの部分に分ける (下、上、右、左、穴の縁)。

$$(1a) \quad \Gamma_1 = [-1, 9] \times \{-1\}, \quad \Gamma_3 = [-1, 9] \times \{1\},$$

$$(1b) \quad \Gamma_2 = \{9\} \times [-1, 1], \quad \Gamma_4 = \{-1\} \times [-1, 1],$$

$$(1c) \quad \omega = \{(x, y) \mid (x - 3/4)^2 + y^2 = 1/16\}.$$

11.5.2 例題

Navier-Stokes 方程式の以下の初期値境界値問題 (方程式は鈴木先生の資料による) を考える。

$$(2a) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - 2\nu \nabla \cdot D(\mathbf{u}) + \nabla p = 0 \quad (\text{in } \Omega \times (0, \infty)),$$

$$(2b) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{in } \Omega \times (0, \infty)),$$

$$(2c) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{on } \omega \times (0, \infty)),$$

$$(2d) \quad \mathbf{u} = (1 - y^2, 0) \quad (\text{on } \Gamma_4 \times (0, \infty)),$$

$$(2e) \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \wedge (2\nu D(\mathbf{u})\mathbf{n} - p\mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (\text{on } (\Gamma_1 \cup \Gamma_3) \times (0, \infty)),$$

$$(2f) \quad 2\nu D(\mathbf{u})\mathbf{n} - p\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (\text{on } \Gamma_2 \times (0, \infty)),$$

$$(2g) \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \text{Stokes 方程式の解}$$

$\mathbf{u}: \bar{\Omega} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $p: \bar{\Omega} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ は未知関数である。

\mathbf{n} と \mathbf{t} は、境界上の点における外向き単位法線ベクトル、単位接線ベクトルである。

ν は既知の正定数である (Reynolds 数の逆数)。

$D(\mathbf{u}) = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)$ は歪テンソルである (前回までは $E(\mathbf{u})$ と書いた)。

11.5.2 例題

$\nabla \cdot D(\mathbf{u})$ はその発散である (行毎にベクトル場の発散を並べたもの)。結局

$$\nabla \cdot D(\mathbf{u}) = \Delta \mathbf{u} + \text{grad div } \mathbf{u}$$

ということになり (説明済み)、(2a) は確かに Navier-Stokes 方程式である。
境界条件の物理的な意味を復習しておく。

- (2c) は粘着境界条件 (no-slip boundary condition)
- (2d) は Dirichlet 境界条件 (境界値はポアズイユ流 (付録参照) の値)
- (2e) は滑り境界条件 (slip boundary condition)
- (2f) は応力が 0 という条件 (outflow condition と呼ぶ人が多い)

記号は異なるが、第 10 回講義スライド p. 6 の (1a)–(1e) で

$$\mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{g}_1(x, y) := \begin{cases} (1 - y^2, 0) & ((x, y) \in \Gamma_4) \\ (0, 0) & ((x, y) \in \omega), \end{cases} \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{0}$$

とした場合である。

初期値は、対応する定常 Stokes 方程式の解 \mathbf{u}_0 とする (これは境界値問題を解いて求めている)。

11.5.3 弱形式の準備

弱形式の作り方は、第 10 回の講義と同じ議論を行う。

$\Gamma_4 \cup \omega$ で定義された \mathbf{g} に対して ($\mathbf{g} = \mathbf{g}_1$, $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ として用いる)

$$V(\mathbf{g}) := \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2 \mid \mathbf{v} = \mathbf{g} \text{ on } \Gamma_4 \cup \partial\omega, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \},$$
$$Q := L^2(\Omega).$$

弱形式 (作りかけ)

Find $(\mathbf{u}(t), p(t)) \in V(\mathbf{g}_1) \times Q$ ($t \in [0, \infty)$) s.t.

$$\left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt}(\mathbf{t}), \mathbf{v} \right) + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p(t)) = 0 \quad (\mathbf{v} \in V(\mathbf{0}), t > 0),$$

$$b(\mathbf{u}(t), q) = 0 \quad (q \in Q, t > 0),$$

$$\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0.$$

ただし

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := 2\nu \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \, dx, \quad b(\mathbf{v}, p) := - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx.$$

物質微分項 $\frac{D\mathbf{u}}{Dt}$ をどう扱うかが問題になる。

11.5.3 弱形式の準備

第10回の講義では、物質微分に由来する $\left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt}(\mathbf{t}), \mathbf{v}\right)$ の扱いは述べなかった。

素朴に考えると、熱方程式のときのように、 $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ を後退差分近似すること、すなわち $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t_n) \doteq \frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t}$ が思い浮かぶ。この方法でも、流速が非常に小さい場合はそれなりの結果が得られる。

しかし、流速が大きくなると不安定性が生じてうまく行かない。それに対処するための方法がいくつか考えられている。

ここでは、FreeFem++ で比較の実装しやすい **Lagrange-Galerkin 法** を紹介する。

11.5.4 Lagrange-Galerkin 法とそれによる弱形式背景と歴史

一般に、移流の効果がある現象のシミュレーションで、**安定性を向上させるために、上流(風上)の情報**^{かざかみ}**を優先的に取り入れる**という方法がある。(これは有限要素法や流体力学の方程式に限定されるものではなく、差分法や移流拡散方程式などにも現れる。)

特性曲線有限要素法はその考え方に基づく方法で、**Lagrange-Galerkin 法**とも呼ばれる(物質微分のことを Lagrange 微分ともいうから?)。

1982 年に出版された Douglas-Russel [3], Pironneau [4] が世界的に有名であるが、日本では Tabata [5] 以来の田端スクールの研究がよく知られている(野津・田端 [6], Notsu-Tabata [7], Tabata-Uchiumi [8], 内海・田端 [9])。

理論的に安定に計算できる手順は知られているが、積分を厳密に計算する必要があり、FreeFem++ でそれを実行する効率的なプログラムを書くのは難しく(以前そういう課題を院生に与えたが、力及ばなかった)、いいかげんな数値積分で実装した場合は、「十分小さな刻み幅を用いれば安定」(もちろん、もはや無条件安定とは言えない)となるようである。

現在でも精度の改善など研究が続いている。

11.5.4 Lagrange-Galerkin 法とそれによる弱形式 物質微分の近似

以下は、おおむね内海 [10] に従って説明する。特に難しいことをしているわけではないが、文献によっては、いい加減な記述で混乱した説明になっているものが珍しくない。きちんと書かれた [10] はありがたい (自力でやったものを照らし合わせられないと不安が残る)。

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $T > 0$, そして流速場 $\mathbf{u}: \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ があるとする。

$s \in [0, T)$, $\mathbf{x} \in \Omega$ とする。 $X(\cdot; \mathbf{x}, s): [0, s] \rightarrow \Omega$ が、時刻 s で \mathbf{x} を通る **特性曲線** (characteristic curve) であるとは、次式が成り立つことをいう。

$$(3) \quad \frac{dX}{dt}(t; \mathbf{x}, s) = \mathbf{u}(X(t; \mathbf{x}, s), t) \quad (0 \leq t < s), \quad X(s; \mathbf{x}, s) = \mathbf{x}$$

$X(t; \mathbf{x}, s)$ は、時刻 s で \mathbf{x} にいる流体粒子の、時刻 t における位置を表す。

時刻を刻み幅 $\Delta t (> 0)$ で離散化する。すなわち

$$(4) \quad t^n := n\Delta t \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

における値 $\mathbf{u}^n(\mathbf{x}) := \mathbf{u}(\mathbf{x}, t^n)$, $p^n(\mathbf{x}) := p(\mathbf{x}, t^n)$ を求めることを目標とする。

学生の相手をした経験から言うと、次の初期値問題の解 φ を $X(\cdot; \mathbf{x}, s)$ と表す、という方が分かりやすいかもしれない、と考えている。

$$\varphi'(t) = \mathbf{u}(\varphi(t), t) \quad (t \in [0, s)), \quad \varphi(s) = \mathbf{x}.$$

11.5.4 Lagrange-Galerkin 法とそれによる弱形式 物質微分の近似

$\phi: \bar{\Omega} \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ の物質微分 $\frac{D\phi}{Dt}$ が、流体粒子から見た時間変化率であることは説明してある。それによると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \right) (\mathbf{x}, t^n) &= \frac{d}{dt} \phi(X(t; \mathbf{x}, t^n), t) \Big|_{t=t^n} \\ &\doteq \frac{\phi(X(t^n; \mathbf{x}, t^n), t^n) - \phi(X(t^n - \Delta t; \mathbf{x}, t^n), t^n - \Delta t)}{\Delta t} \\ &= \frac{\phi(\mathbf{x}, t^n) - \phi(X(t^{n-1}; \mathbf{x}, t^n), t^{n-1})}{\Delta t}. \end{aligned}$$

すなわち

$$(5) \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \right) (\mathbf{x}, t^n) \doteq \frac{\phi^n(\mathbf{x}) - \phi^{n-1}(X(t^{n-1}; \mathbf{x}, t^n))}{\Delta t}.$$

ただし $\phi^n(\mathbf{x}) := \phi(\mathbf{x}, t^n)$ である。

11.5.4 Lagrange-Galerkin 法とそれによる弱形式 物質微分の近似

FreeFem++ のドキュメントや鈴木厚先生は、写像 $\mathbf{x} \mapsto X(t^{n-1}; \mathbf{x}, t^n)$ を X^{n-1} と表す記法を用いている。それを使うと

$$\phi^{n-1}(X(t^{n-1}; \mathbf{x}, t^n)) = \phi^{n-1}(X^{n-1}(\mathbf{x})) = \phi^{n-1} \circ X^{n-1}(\mathbf{x}).$$

ゆえに

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \right) (\mathbf{x}, t^n) \doteq \frac{\phi^n(\mathbf{x}) - \phi^{n-1}(X(t^{n-1}; \mathbf{x}, t^n))}{\Delta t} = \frac{\phi^n(\mathbf{x}) - \phi^{n-1} \circ X^{n-1}(\mathbf{x})}{\Delta t}.$$

個人的な意見

私は、 $X(\cdot; \cdot, \cdot)$ と X^{n-1} で、 X という文字を使い回しているのは、混乱を引き起こしかねないような気がする (この後 X_*^{n-1} なんてのも出て来るし)。例えば微分方程式の解の方を $\varphi(t; \mathbf{x}, s)$ と書いて

$$X^{n-1}(\mathbf{x}) := \varphi(t^{n-1}; \mathbf{x}, t^n)$$

とするとか記号を工夫してみたい。

11.5.4 Lagrange-Galerkin 法とそれによる弱形式 弱形式

Navier-Stokes 方程式の弱形式に現れる $(\frac{D\mathbf{u}}{Dt}, \mathbf{v})$ をこのやり方で差分近似する。

$$(6a) \quad \left(\frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1} \circ X^{n-1}}{\Delta t}, \mathbf{v} \right) + a(\mathbf{u}^n, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p^n) = 0 \quad (\mathbf{v} \in V(\mathbf{0})),$$

$$(6b) \quad b(\mathbf{u}^n, q) = 0 \quad (q \in Q).$$

…これが **Lagrange-Galerkin 法**である。

連立1次方程式の係数行列に、対流項 $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ に由来するものが入らないため、行列は対称になる。これは数値計算には有効である。

安定性にも効果がある。移流拡散方程式に適用した場合に無条件安定であり、Navier-Stokes 方程式に適用した場合も $\Delta t \leq Ch^{d/4}$ という形の安定性条件が成り立つ (Süli [11]) などの結果がある。

$X(\cdot; \mathbf{x}, t^n)$ は常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dX}{dt}(t; \mathbf{x}, t^n) = \mathbf{u}(X(t; \mathbf{x}, t^n), t) \quad (0 \leq t < t^n), \quad X(t^n; \mathbf{x}, t^n) = \mathbf{x}$$

の解である。(5) の右辺に現れる $X^{n-1}(\mathbf{x}) = X(t^{n-1}; \mathbf{x}, t^n)$ の厳密な値を計算するのは難しいが、近似値で良ければ Euler 法による次の値を使うことが考えられる。

$$(7) \quad X_*^{n-1}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} - \mathbf{u}^n(\mathbf{x})\Delta t.$$

すなわち

$$(8) \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \right) (\mathbf{x}, t^n) \doteq \frac{\phi^n(\mathbf{x}) - \phi^{n-1}(X_*^{n-1}(\mathbf{x}))}{\Delta t}.$$

11.5.5 FreeFem++ の convect()

FreeFem++ には、 $\text{convect}([u_1, u_2], \Delta t, \phi)$ というオペレーターが用意されている。

u_1, u_2, ϕ はいずれもある有限要素空間 V_h の要素であり、 $\Delta t \in \mathbb{R}, \Delta t \neq 0$ である。

$\text{convect}([u_1, u_2], \Delta t, \phi)$ は $\phi \circ X$ を返す。ここで $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ は以下のように定義される。

任意の $\mathbf{x} \in \Omega$ について、微分方程式の初期値問題

$$\frac{d\xi(t)}{dt}(t) = \mathbf{u}(\xi(t)), \quad \xi(0) = \mathbf{x}$$

の解 ξ (これは \mathbf{x} に依存するので、本来は $\xi(\cdot; \mathbf{x})$ のように、 \mathbf{x} を添えて表すべきかもしれない) を用いて

$$X(\mathbf{x}) = \xi(\Delta t)$$

と定める。(X はベクトル場 \mathbf{u} の定める力学系において、時間 Δt が経過した後の位置を対応させる写像である。)

前項の $\phi^{n-1} \circ X^{n-1}$ は、 $\text{convect}([u_1^n, u_2^n], -\Delta t, \phi^{n-1})$ とすれば計算できる。

11.5.6 流線を描くテクニック

速度場 \mathbf{u} が与えられたとき、流線は、常微分方程式を解くことで描けるが、もし流れ関数が求まるならば、その等高線としても描くことができる。

命題 1 (非圧縮流と流れ関数)

2次元領域 Ω における速度場 \mathbf{u} について、次が成り立つ。

- ① \mathbf{u} の流れ関数が存在するならば、 \mathbf{u} は非圧縮である。
- ② \mathbf{u} が非圧縮ならば、 Ω の任意の単連結部分領域で \mathbf{u} の流れ関数が存在する。
- ③ \mathbf{u} の流れ関数 ψ が存在するとき、 $\Delta\psi = -\operatorname{rot} \mathbf{u}$. ($\operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}$.)

証明は難しくない (次の応用複素関数のスライド 1 枚)。

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2-2021/AC06_0525_handout.pdf#page=13

今考えている問題は非圧縮流である。 Ω は 1 つ穴が空いているので単連結ではないが、穴の縁 ω で $\mathbf{u} = 0$ であるので、実は流れ関数 ψ が存在する。実際、

$$\psi(\mathbf{x}) := \int_{\gamma_{\mathbf{x}}} (-u_2 dx + u_1 dy)$$

とすれば良い。ここで $\gamma_{\mathbf{x}}$ は、定点 $\mathbf{a} = (-1, 0)$ から \mathbf{x} に至る曲線である。

11.5.6 流線を描くテクニック

$\int_{\omega} (-u_2 dx + u_1 dy) = 0$ であるから、 $\psi(\mathbf{x})$ が $\gamma_{\mathbf{x}}$ の取り方によらずに定まる。

ψ は Poisson 方程式の境界値問題の解として求めることができる (?)。

$$-\Delta\psi = \text{rot } \mathbf{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

Γ_4 での Dirichlet データが次のように求まる。

$$\psi(-1, y) = \int_0^y u_1 dy = \int_0^y (1 - y^2) dy = y - y^3.$$

Γ_1, Γ_3 での Dirichlet データが次のように求まる。

$$\psi(x, \pm 1) = \pm \frac{2}{3} + \int_{(-1, \pm 1) \rightarrow (x, \pm 1)} (-u_2) dx = \pm \frac{2}{3} + 0 = \pm \frac{2}{3}.$$

ω では $\psi = 0$ と鈴木先生は書いているが…理解できない。((-1, 0) から (0, 0) までの水平線上で $u_2 = 0$ として (なぜ?)、 $\psi(0, 0) = 0$ と結論している。)

また Γ_2 で $\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -u_2 = 0$ としているが、これも根拠が良く分からない。

流体力学の常識: Poiseuille 流

ポアズイユ **Poiseuille 流** は、ハーゲン Hagen-Poiseuille 流、管内流とも言う。定常 Navier-Stokes 方程式の有名な特殊解である。

空間内の (断面が円盤である) 柱状領域

$$(9) \quad \Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 < a^2\}$$

における定常 Navier-Stokes 方程式

$$(10a) \quad \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\text{grad } p + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (\text{in } \Omega),$$

$$(10b) \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (\text{in } \Omega),$$

$$(10c) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

を考える。無限遠での境界条件の指定はしていないので、このままでは解が一意には定まらない。

一方向の流れ、つまり速度場 $\mathbf{u} = (u, v, w)$ が

$$(11) \quad v = w = 0, \quad \text{i.e.} \quad \mathbf{u} = (u, 0, 0)$$

となっている場合を考える。

非圧縮条件 $\text{div } \mathbf{u} = 0$ は、

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

となるので、 $u = u(y, z)$ となる。

流体力学の常識: Poiseuille 流

結局 Navier-Stokes 方程式中の非線型項 $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = 0$ となる。実際 ($v = w = 0$, $\partial u / \partial x = 0$ であるので)

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

従って

$$\mathbf{0} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{u}.$$

成分表示すると

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} \Delta u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

すなわち

$$0 = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

流体力学の常識: Poiseuille 流

後の二つの式から $p = p(x)$. 最初の式を移項した

$$-\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

において、左辺は x に依らず、右辺は y, z に依らないので、結局は定数である。それを α とおくと、

$$\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = -\alpha, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\alpha.$$

後者を積分して

$$(12) \quad p(x) = p_0 - \rho \alpha x \quad (\text{ただし } p_0 := p(0)).$$

一方

$$\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = -\alpha.$$

流体力学の常識: Poiseuille 流

流れが軸対称であることを仮定する。yz 平面に極座標

$$y = r \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi$$

を導入すると、軸対称性により $u = u(r)$ であるから、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right).$$

ゆえに

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = -\frac{\alpha}{\nu}.$$

これから

$$u(r) = -\frac{\alpha}{4\nu} r^2 + A \log r + B \quad (A, B \text{ は積分定数}).$$

$r = 0$ において u は有限でなければならないから $A = 0$.

また円柱の壁面 $r = a$ において、流速は 0 でなければならないから

$$0 = u(a) = -\frac{\alpha}{4\nu} a^2 + B \quad \text{ゆえに} \quad B = \frac{\alpha}{4\nu} a^2.$$

ゆえに

$$u(r) = \frac{\alpha}{4\nu} (a^2 - r^2).$$

流体力学の常識: Poiseuille 流

こうして次の有名な結果を得た:

$$(13) \quad u(r) = \frac{\alpha}{4\nu} (a^2 - r^2), \quad p(x) = p_0 - \rho\alpha x.$$

流量は

$$Q = 2\pi \int_0^a ru(r) dr = \frac{\alpha}{8\nu} \pi a^4.$$

平均流速はこれを πa^2 で割った

$$U_{\text{mean}} = \frac{\alpha}{8\nu} a^2.$$

Poiseuille 流は、Stokes 方程式 (Navier-Stokes 方程式で非線型項 = 0 とおいて得られる) の厳密解でもある。

2次元版として、平行版の間の領域 $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -a < y < a\}$ における流れ

$$(14) \quad u(x, y) = \frac{\alpha}{2\nu} (a^2 - y^2), \quad p(x) = p_0 - \rho\alpha x$$

が得られる。

- [1] Suzuki, A.: Finite element programming by FreeFem++ —intermediate course, 日本応用数理学会「産業における応用数理」研究部会のソフトウェアセミナー「FreeFem++ による有限要素プログラミング — 中級編 —」(2016/2/11-12) の配布資料で、<https://www.ljll.math.upmc.fr/~suzukia/FreeFempp-tutorial-JSIAM2016/> から入手できる (2016).
- [2] 今井功：流体力学 前編, 裳華房 (1973), 流体力学の基本的文献。後編は書かれなかった。
- [3] Douglas, J. and Russell, T.: Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 19, No. 5, pp. 871–885 (1982).

- [4] Pironneau, O.: On the Transport-Diffusion Algorithm and Its Applications to the Navier-Stokes Equations, *Numerische Mathematik*, Vol. 38, No. ?, pp. 309–332 (1982).
- [5] Tabata, M.: A finite element approximation corresponding to the upwind finite differencing, *Memoirs of Numerical Mathematics*, Vol. 4, pp. 47–63 (1977), 私はコピーを持っていない。東大数理の図書室にある。
- [6] 野津裕史, 田端正久: Navier-Stokes 方程式のための圧力安定化・特性曲線法結合有限要素スキーム, 日本応用数理学会論文誌, Vol. 18, No. 3, pp. 427–445 (2008).
- [7] Notsu, H. and Tabata, M.: A single-step characteristic-curve finite element scheme of second order in time for the incompressible Navier-Stokes equations, *Journal of Scientific Computing*, Vol. 38, No. 1, pp. 1–14 (2009).

- [8] Tabata, M. and Uchiumi, S.: An Exactly Computable Lagrange-Galerkin Scheme for the Navier-Stokes Equations and its Error Estimates, *Mathematics of Computation*, Vol. 87, No. 309, pp. 39–67 (January 2018).
- [9] 内海晋弥, 田端正久: 数値積分を用いる Lagrange-Galerkin スキームの収束性, 日本応用数理学会 2018 年 年会 講演予稿集 (2018.9.3-5, 名古屋) (2018).
- [10] Shinya UCHIUMI(内海晋弥): Lagrange-Galerkin schemes with a locally linearized velocity for the flow problems, 早稲田大学大学院の博士論文? <https://waseda.repo.nii.ac.jp/records/38754> (February 2017).
- [11] Süli, E.: Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method for the Navier-Stokes equations, *Numerische Mathematik*, Vol. 53, No. 4, pp. 459–483 (1988).